ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 2.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Изоклины. Интегральные кривые.

Цель лекции

Познакомить студентов с геометрическими методами решения дифференциальных уравнений,с понятиями интегральной кривой,поля направлений,изоклинами. Приводятся примеры

Основные вопросы

1. Интегральные кривые
2. Поле направлений
3. Изоклины
4. Визуализация поля направлений и изоклин
5. Пример геометрического построения решение дифференциального уравнения на графике

Интегральная кривая

Интегральная кривая - это кривая, которая является графиком функции, удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Интегральная кривая $y = \varphi(x)$ - это траектория на плоскости x, y, по которой движется точка (x, y), если она удовлетворяет этому уравнению.

Интегральная кривая – это геометрическое представление решения дифференциального уравнения.

Каждому решению уравнения соответствует своя интегральная кривая, а параметры кривой определяются начальными условиями задачи.

Поле направлений

- Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad (2.1)$$

разрешенное относительно производной, дает зависимость между координатами точки (правая часть уравнения) и угловым коэффициентом касательной к графику решения этого уравнения в точке (x, y) (левая часть уравнения).

- Множество маленьких сегментов касательных, проведенных через точки искомой кривой, так называемой интегральной кривой, дает *поле направлений*. Поле направлений визуализирует общую форму интегральных кривых - решений дифференциального уравнения

Изоклины

- ***Изоклины*** — линии, на которой касательные, т.е. элементы поля направлений имеют одинаковый наклон

$$\varphi = arctgf(x, y).$$

- Геометрическое место точек на плоскости (x, y), в которых касательные к искомым интегральным кривым уравнения

$$y' = f(x, y)$$

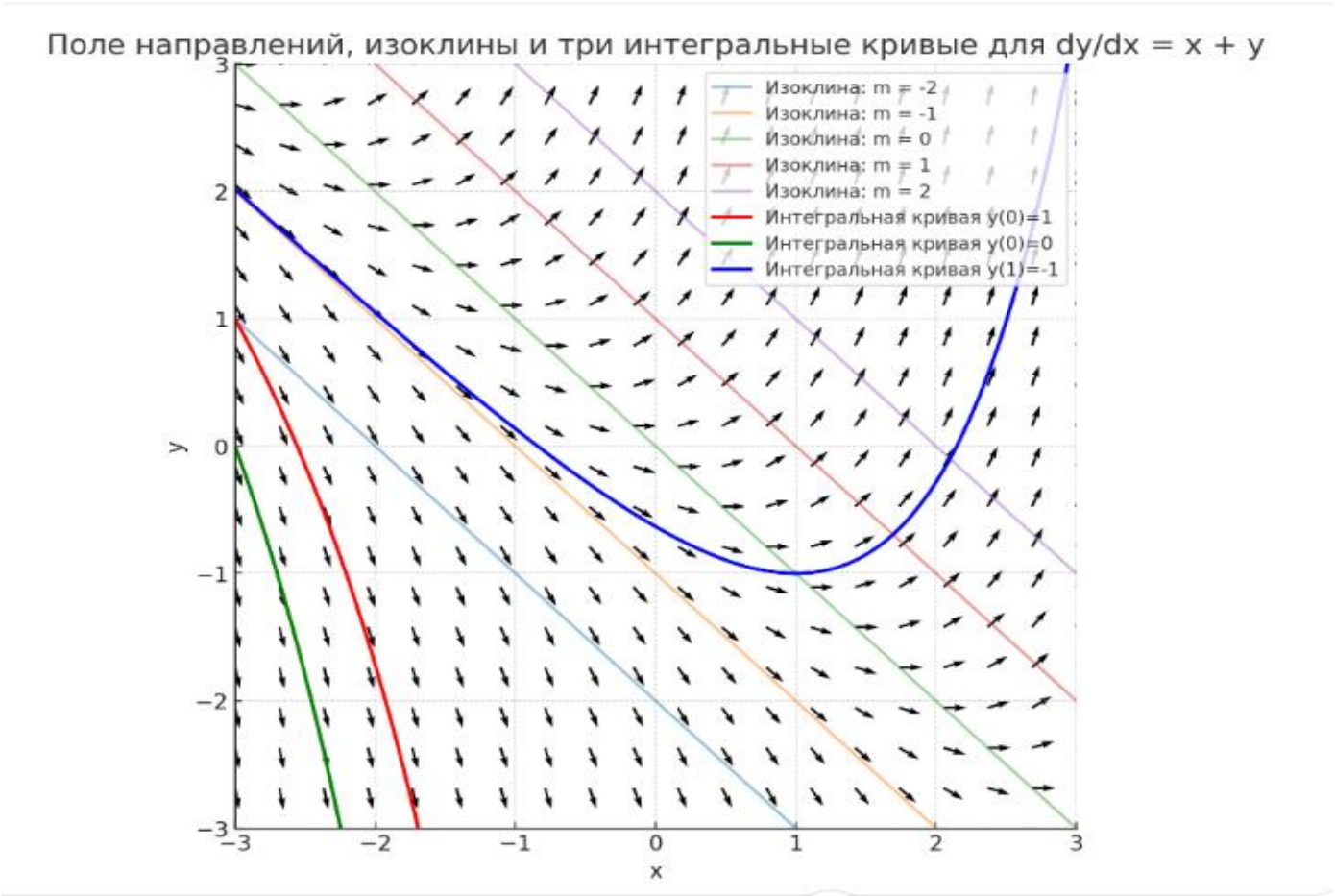
имеют одинаковое, постоянное значение, называется **изоклиной**.

- Уравнение изоклин имеет вид $f(x, y) = m$, где m - постоянная.

Построение геометрически интегральных кривых ДУ – решений уравнения

- *Изоклины* дают возможность построить множество элементов поля направлений с одинаковым наклоном.
- *Поле направлений* представляет собой множество маленьких отрезков,касающихся точек интегральной кривой,которую надо построить.
- С помощью поля направлений мы можем увидеть,как ведут себя *интегральные кривые*, которые должны касаться элементов поля направлений.
- Это позволяет визуально представить структуру решений уравнения без явного нахождения их аналитической формы.

Пример : ***Визуализация поля направлений и изоклин для уравнения*** $\frac{dy}{dx} = x + y$



Вывод

- Правая часть уравнения $y' = f(x, y)$, приравненная к значению в фиксированной точке, дает изоклину, на которой множество элементов поля направлений с одинаковым наклоном.
- Множество изоклин, на каждой из которых изображено множество маленьких отрезков одинакового наклона дает поле направлений.
- Представляя, что семейство интегральных кривых дифференциального уравнения должно касаться элементов поля направлений визуализируем решения исходного дифференциального уравнения

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое интегральная кривая?
2. Что такое поле направлений?
3. Что такое изоклины?
4. Как из дифференциального уравнения получается уравнение для построения изоклин?
5. Как вычисляется наклон касательной к интегральной кривой?
6. Что дает визуализация поля направлений?
7. Какая интегральная кривая является графиком решения задачи Коши?

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: «Физматлит».– 2009.- 280 с
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974
3. Л.Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, М.: Едиториал УРСС, 2002.— 256 с.
6. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие для втузов. Изд.-2-е. М., «Высш. Школа», 1976, с. 304.