ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 5.

Уравнения в полных дифференциалах . Интегрирующий множитель

Цель лекции

Познакомить студентов с уравнениями в полных дифференциалах, с условием,когда оно является уравнением в полных дифференциалах,а также как можно привести уравнение 1-го порядка,разрешенное относительно производной к уравнению в полных дифференциалах. Познакомить с понятием интегрирующего множителя и со способами его нахождения.

Основные вопросы

1. Уравнения в полных дифференциалах
2. Необходимое и достаточное условие полноты уравнения
3. Теорема полноты дифференциального уравнения
4. Теорема существования и единственности решения
5. Интегрирующий множитель
6. Пример
7. Интегрирующие множители: $\mu(x)$, $\mu(y)$

Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (5.1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(x,y)$, такая что её полный дифференциал равен левому выражению уравнения: $dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ (5.2)

для всех точек, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ не равны одновременно нулю.

Сравнивая формулу полного дифференциала функция $U(x,y)$:

$$dU(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy$$

и выражение (5.2), имеем: $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

Критерий полноты уравнения

Тогда уравнение (5.1) можно переписать в виде:

$$dU(x,y) = 0,$$

так как правая часть уравнения равна нулю.

В этом случае решение уравнения имеет вид:

$$U(x,y) = C, \quad \text{где } C \text{ - константа.} \tag{5.4}$$

Условие, чтобы уравнение было полным:

Для функций $M(x,y), N(x,y)$, непрерывных и имеющих непрерывные частные производные в области D, уравнение является полным тогда и только тогда, когда:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{5.5}$$

Это необходимое и достаточное условие полноты уравнения.

Необходимое и достаточное условие полноты уравнения

Теорема. Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ и их частные производные являются непрерывными функциями в прямоугольнике

$$D = \{(x,y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\},$$

т.е. функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ принадлежат $C^1(D)$. Тогда дифференциальное уравнение (5.1):

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах в области D, тогда и только тогда, когда выполняется следующее равенство

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Теорема существования и единственности

Пусть в прямоугольнике

$D = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$,

функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ непрерывны вместе с их частными производными первого порядка, причем всюду в D выполняется условие (5.5) и $N(x, y)$ не обращается в нуль.

Тогда через каждую точку (x_0, y_0) прямоугольника D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (5.1).

Пример

1. Найти решение уравнения
$(2xy + 5)dx + (x^2 + 6y)dy = 0.$
Проверка полноты:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy + 5) = 2x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 6y) = 2x$$

Условие полноты (5.5) выполняется. Уравнение полное – левая часть является полным дифференциалом некоторой функции.

Пример

Найдем функцию $U(x,y)$: Интегрируем $M(x,y)$ по x, считая y константой: $U(x,y)=\int(2xy+5)dx+\varphi(y)=x^2y+5x+\varphi(y)$,

Дифференцируем полученное выражение по y и приравниваем к $N(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2y+5x+\varphi(y)]=N(x,y)\Longrightarrow\ \varphi'(y)=6y$$

Найдем решение, получившееся относительно $\varphi(y)$ уравнения.

$\varphi(y)=3y^2+C_0$, где C_0- произвольная постоянная. Положим $C_0=0$.

Получим функцию $U(x,y)$: $U(x,y)=x^2y+5x+3y^2$.

Из (5.4) находим общие решение исходного уравнения:

$$x^2y+5x+3y^2=C.$$

Интегрирующий множитель

Если условие (5.5) не выполняется, т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

то уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (5.1)$$

может быть приведено к уравнению в полных дифференциалах с помощью умножения его на так называемый интегрирующий множитель, который в общем случае является функцией от x и y: $\mu(x,y)$:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$

Условия (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

Продифференцировав это равенство, получим выражение

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Откуда имеем

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Получили уравнение в частных производных, из которого можно найти $\mu(x, y)$.

Интегрирующие множители: $\mu(x)$, $\mu(y)$

Если уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, то $\mu(x)$ имеет следующий вид:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx},$$

где $\frac{(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})}{N}$ - функция, зависящая только от x.

Интегрирующий множитель, зависящий только от y, вычисляется с помощью следующей формулы:

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy},$$

где $(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x})\Big/_{M}$ - функция, зависящая только от y.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется уравнения в полных дифференциалах?
2. Сформулируйте необходимое и достаточное условие полноты уравнения.
3. Какая функция называется интегрирующим множителем?
4. Напишите формулу, по которой находится интегрирующий множитель, зависящий только от x.
5. Чему равен интегрирующий множитель для линейного уравнения 1-го порядка?
6. Найти решение уравнения

$$ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$$

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: «Физматлит». – 2009. - 280 с
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974
3. Л.Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.
4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, М.: Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
6. Гутер Р.С., Янпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. Учебное пособие для втузов. Изд.-2-е. М., «Высш. Школа», 1976, с. 304.