ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 10.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с

постоянными коэффициентами .

Метод подбора частного решения

Цель лекции

Познакомить студентов с линейными неоднородными дифференциальными уравнениями n-го порядка,изнать структуру его решения.Познакомить с методом неопределенных коэффициентов,так называемого метода подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Основные вопросы

1. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами
2. Общее решение линейным однородным уравнением n-го порядка
3. Характеристическое уравнения, соответствующее линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами
4. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения
5. Метод неопределенных коэффициентов

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (1)$$

где коэффициенты $a_1, \cdots, a_n$ постоянные числа.

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

Далее находим корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2), с помощью которых строим общее решение уравнения (2) в зависимости от характера корней характеристического уравнения.

Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка

Теорема. Если $y_1(x), \dots y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2), то общее решение уравнения (2) дается формулой

$$y_{oo} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

где $c_1, .., c_n$ – произвольные постоянные.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, т.е. уравнения с ненулевой правой частью: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$

определяется с помощью следующей теоремы.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами

Теорема. Если $u = u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения и является фундаментальной системой решений соответствующего однородного уравнения,то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $y = u + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n;$; другими словами,общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения рассматриваемого неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Следовательно,для построения общего решения неоднородного уравнения необходимо найти одно из его частных решений при условии, что известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения (2).

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов - это метод подбора частного решения для линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, когда неоднородность вызвана квазимногочленом.

Квазимногочленом называются функции вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) e^{\mu_j x}$$

где μ_j – постоянные (не обязательно действительные), а $P_j(x)$ – многочлены от x. Таким образом, этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, если их правая часть имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ (или является суммой таких функций). Здесь α и β - константы, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы n-го и m-го порядка, соответственно.

Подбор частного решения

Частное решение уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

где $f(x)$ имеет заданный вид, $a_1, \cdots, a_n$ - действительные постоянные коэффициенты) следует искать в виде:

$$u(x) = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + \ Q_l(x) \sin \beta x]$$

Здесь r равно числу того, как часто встречается корень $\alpha + i\,\beta$ в характеристическом уравнении

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, k^1 + a_n = 0$$

(если характеристическое уравнение не имеет такого корня, то следует взять $r = 0$)

$P_l(x)$ и $Q_l(x)$ являются полными многочленами от x порядка l с неопределенными коэффициентами и l равен наибольшему из чисел n и m ($l = n \geq m$ или $l = m \geq n$):

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \cdots + A_l\ ,\ Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \cdots + B_l$$

Теорема существования решения

Теорема . Уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x) e^{\mu x}$$

где $P(x) -$ многочлен степени l , имеет частное решение вида

$$Y_p(x) = x^s e^{\mu x} Q(x)$$

где s равно нулю , если μ не является корнем характеристического уравнения оператора L , и s равно кратности корня μ в противном случае , а $Q(x) -$ многочлен той же степени l, что и $P(x)$.

Вывод: частное решение подбирается для определенных видов правых частей линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами .

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами?
2. Чему равно общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка?
3. Какова структура общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами?
4. Как пишется характеристическое уравнения, соответствующее линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами?
5. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов?
6. Для каких правых частей используется метод неопределенных коэффициентов?

Литература

1. Петровский И Г .Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений .- М .:«Физматлит».– 2009.- 280 с

2. Н М .Матвеев .Дифференциальные уравнения .Изд .-3.е .Минск, Вышейш. школа, 1996, с .320-330.

3. Матвеев Н М .Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений .Минск, 1974.

4. . Л Э .Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М .: Наука, 1969, с 15-24.

5. Филиппов А Ф .Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105

6.. Краснов М Л ., Киселев А И ., Макаренко Г И .Обыкновенные дифференциальные уравнения :Задачи и примеры с подробными решениями, М .: Едиториал УРСС , 2002 .— 256 с .