ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция 6.

Метод параметризации дифференциального уравнения. Уравнения Лагранжа, Клеро. Особые решения.

Цель лекции

Познакомить студентов с методом параметризации дифференциального уравнения,теоремой существования и единственности для уравнения $F(x, y, y') = 0$. Изучить понятие решения в параметрическом виде и способы нахождения решения в параметрическом виде.

Основные вопросы

1. Основные понятия и определения .
2. Метод введения параметра
3. Уравнение Лагранжа
4. Уравнение Клеро
5. Особое решение
6. Огибающая семейства интегральных кривых общего решения
7. Дискриминантная кривая семейства интегральных кривых

Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение, не разрешённое относительно производной, — это уравнение первого порядка, записанное в неявной форме:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1.1)$$

где F — некоторая функция трёх переменных.

Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале (a, b), называется *решением уравнения (1.1)* в этом интервале, если она обращает уравнение (1.1) в тождество:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \qquad x \epsilon (a, b).$$

Основные понятия и определения

Уравнения

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \qquad (1.3)$$

являются решением уравнения (1.1) в параметрической форме в интервале (α, β), если в этом интервале имеет место тождество:

$$F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \equiv 0, \quad t\epsilon(\alpha, \beta). \qquad (1.4)$$

Кривую на плоскости (x, y), соответствующую решению уравнения, называют интегральной кривой уравнения (1.1).

Однопараметрическое семейство интегральных кривых в виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

называется *общим интегралом* уравнения (1.1).

Основные понятия и определения

Семейство интегральных кривых заданных в виде, разрешенном относительно y :

$$y = \varphi(x, C),$$

называется *общим решением* уравнения (1.1).

Семейство интегральных кривых уравнения (1.1) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C), \end{cases}$$

называется *общим решением уравнения (1.1) в параметрической форме*.

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) называется *частным решением*, если в каждой его точке задача Коши имеет единственное решение.

Метод введения параметра

Метод введения параметра позволяет устранить неявную зависимость от y' и привести уравнение к виду, пригодному для интегрирования, — это способ решения дифференциальных уравнений первого порядка вида (1.1):

$$F(x, y, y') = 0,$$

при котором производная y' временно рассматривается как *новая независимая переменная*:

$$p = y'.$$

Вместо поиска явной зависимости $y(x)$, строим *параметрическую кривую*:

$$\begin{cases} x = x(p), \\ y = y(p). \end{cases}$$

Уравнение Лагранжа

Уравнением Лагранжа называется дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно x и y, коэффициентами которого являются функции от производной неизвестной функции y'.

Уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \qquad (7.8)$$

где $\varphi(y')$ и $\psi(y')$ - непрерывные функции называется **уравнением Лагранжа**.

Уравнение Лагранжа разрешено относительно y , поэтому применяем следующую параметризацию :

$$x = x, \quad y = \varphi(p)x + \psi(p), \quad y' = p.$$

Уравнение Лагранжа

Дифференцируя поученное выражение для y и заменяя dy на pdx , имеем:

$$\varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = pdx\ ,$$

приводится к линейному относительно x уравнению:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}\ x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}, \qquad (\varphi(p) - p \neq 0)$$

Интегрируя его, найдем $x = F(p, C)$. Подставим в представление y и получим общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме.:

$$\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = F(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}.$$

Уравнение Клеро

Уравнением Клеро называется уравнение вида:

$$y = y'x + \psi(y')$$

Оно получается из уравнения Лагранжа, если положить $\varphi(y') = y'$, решается методом введения параметра.

Общее решение Уравнение Клеро определяет семейство прямых:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Уравнение Клеро имеет особое решение, определяемое параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = -\psi(y') \\ y = -p\psi(y') + \psi(p) \end{cases}$$

Особое решение

Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Геометрически особому решению соответствует интегральная кривая, не содержащаяся в семействе интегральных кривых, составляющих общее решение или общий интеграл уравнения. Особое решение является ***огибающей*** семейства интегральных кривых общего решения.

Огибающая семейства интегральных кривых

Огибающей будем называть такую кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (1.9)$$

и ни на каком участке не совпадает ни с одной из кривых семейства (1.9).

Огибающая семейства интегральных кривых (1.9) уравнения

$$y' = f(x, y)$$

является решением этого уравнения и притом особым.

Огибающей может быть только дискриминантная кривая, то есть кривая, определяемая уравнением семейства (1.9), и уравнением, полученным дифференцированием его по параметру.

Дискриминантная кривая

Дискриминантная кривая семейства интегральных кривых определяется из системы:

$$y = \varphi(x, C), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$$

или

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0.$$

Найдя дискриминантную кривую, нужно проверить, будет ли она или ее часть огибающей данного семейства или части его.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение решения уравнения в параметрической форме?
2. Дайте определение особого решения дифференциального уравнения?
3. Какое уравнение называется не разрешенным относительно производной?
4. В чем суть метода параметризации?
5. Как интегрируется уравнения Клеро?
6. Как интегрируется уравнение Лагранжа?
7. Дайте определение огибающей семейства?
8. Что такое дискриминантная кривая?

Литература

1. Петровский И Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: «Физматлит».– 2009.- 280 с

2. Матвеев Н М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1974.

3. Л Э. Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления», М.: Наука, 1969, с 15-24.

4. Филиппов А Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М, Наука, 1973г. с. 101-105

5. Краснов М Л., Киселев А И., Макаренко Г И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями, М.: Едиториал УРСС, 2002.— 256 с.