Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 3

Системы линейных алгебраических уравнений

Исследование совместности и решение методом Гаусса

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 2. СЛАУ и матричная алгебра

Цель и план лекции

Цель: исследовать линейную систему и найти все её решения с помощью последовательного исключения неизвестных.

Основные понятия

Решение и совместность системы.
Расширенная матрица.
Ступенчатый вид.

Основные действия

Элементарные преобразования строк.
Прямой и обратный ход Гаусса.
Выделение свободных неизвестных.

Результат исследования: одно решение, отсутствие решений или описание всего семейства решений.

Линейная система как математическая модель

Два вида изделий требуют 2 и 3 единицы материала. Всего изготовили 40 изделий и израсходовали 100 единиц материала.

Пусть x и y обозначают количество изделий каждого вида. Условия задачи дают систему:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 2x + 3y = 100. \end{cases}$$

Вычитая удвоенное первое уравнение из второго, получаем $y = 20$, затем $x = 20$.

Линейное уравнение и система

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ и правая часть b заданы. Неизвестные входят только в первой степени и не перемножаются.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассматриваем коэффициенты и неизвестные из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Геометрические рисунки относятся к $\mathbb{R}$.

Решение и совместность системы

Решение системы: упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_n)$, который удовлетворяет всем её уравнениям одновременно.

Совместная система

Имеет хотя бы одно решение.
Определённая система имеет ровно одно решение.
Неопределённая система имеет более одного решения.

Несовместная система

Не имеет решений.
При исследовании необходимо проверить все уравнения, включая строки, которые возникают после исключения.

Для линейных систем над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ наличие двух различных решений означает наличие бесконечно многих.

Коэффициенты в виде прямоугольной таблицы

Запишем коэффициенты при одинаковых неизвестных в одни и те же столбцы. Правые части вынесем за вертикальную черту.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Таблица слева от черты называется матрицей коэффициентов A. Таблица с правыми частями называется расширенной матрицей [A | b].

Однородные и неоднородные системы

Однородная система

Все правые части равны нулю. Нулевой набор всегда является решением.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Неоднородная система

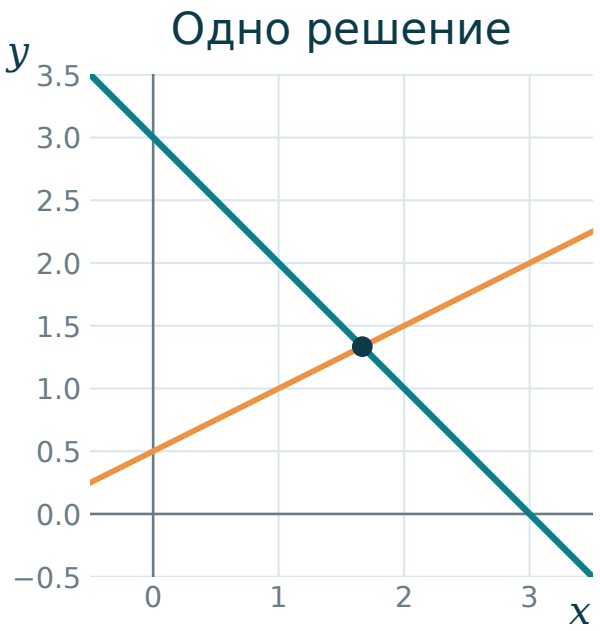
Хотя бы одна правая часть отлична от нуля. Совместность требует отдельного исследования.

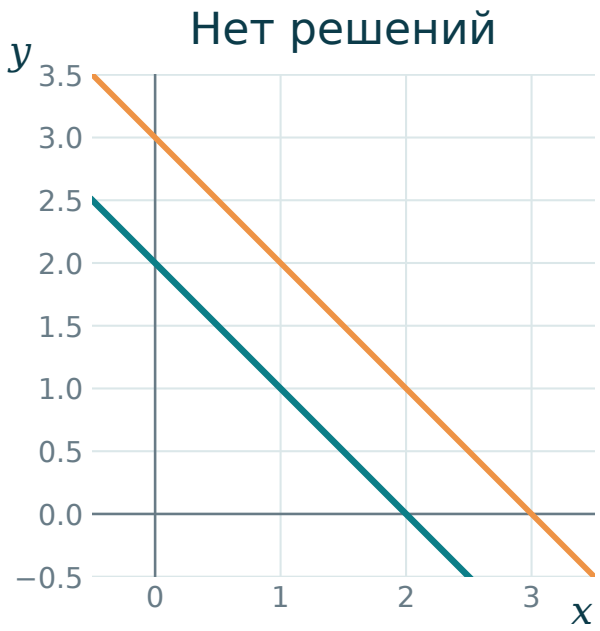
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

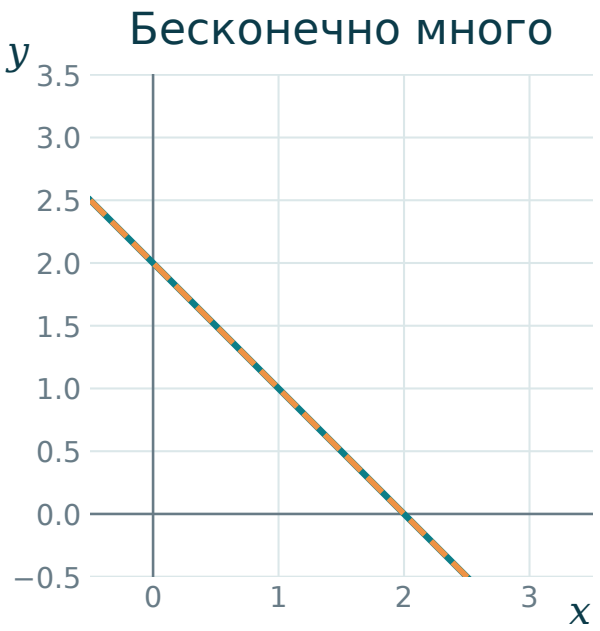
Однородность определяют по правым частям исходных уравнений.

Геометрия системы с двумя неизвестными

Если коэффициенты действительны и в каждом уравнении есть ненулевой коэффициент, каждое уравнение задаёт прямую.







Решения системы соответствуют общим точкам всех прямых.

Элементарные преобразования строк

Перестановка	$R_i \leftrightarrow R_j$: поменять два уравнения местами.
Умножение строки	$R_i \leftarrow \lambda R_i$, где $\lambda \neq 0$: умножить уравнение на ненулевое число.
Прибавление строки	$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, где $i \neq j$: прибавить к одному уравнению кратное другого.

Любое преобразование применяют ко всей строке, включая правую часть.

Почему сохраняется множество решений

Перестановку строк можно выполнить повторно. Умножение на ненулевое число можно обратить делением на это число.

После замены $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ исходная строка восстанавливается заменой $R_i \leftarrow R_i - \lambda R_j$.

Исходная система $\iff$ Преобразованная система

Обратимость каждого шага означает равносильность систем. Умножение строки на нуль этим свойством не обладает.

Ступенчатый вид расширенной матрицы

В каждой ненулевой строке выделим первый ненулевой элемент. Его называем ведущим элементом строки.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Нулевые строки находятся внизу.
Каждый следующий ведущий элемент расположен правее предыдущего.
Под ведущими элементами стоят нули.

Ведущие элементы могут отличаться от 1. Ступенчатый вид одной и той же системы может быть различным.

Прямой и обратный ход метода Гаусса

Прямой ход

Найти ненулевой ведущий элемент.
При необходимости переставить строки.
Исключить неизвестное из строк ниже.
Продолжить с оставшейся частью таблицы.

Обратный ход

Проверить отсутствие противоречий.
Выделить свободные неизвестные.
Выразить ведущие неизвестные снизу вверх.
Записать все решения.

Если в текущем столбце ниже ведущих строк стоят только нули, переходят к следующему столбцу неизвестных.

Как читать ступенчатую систему

Строка $[\,0 \;\cdots\; 0 \mid c\,]$ при $c \neq 0$ означает противоречие $0 = c$. В этом случае решений нет.

Если противоречий нет и каждое неизвестное имеет ведущий элемент, обратный ход даёт единственное решение.

Если противоречий нет и имеются свободные неизвестные, им можно присвоить произвольные значения и получить семейство решений.

Нулевая строка $[\,0 \;\cdots\; 0 \mid 0\,]$ не накладывает нового условия.

Пример 1: система с единственным решением

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Первый ведущий элемент равен 1. Вычтем удвоенную первую строку из второй, а первую строку из третьей.

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \qquad R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

Пример 1: исключение первой неизвестной

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

Переставили строки R_2 и R_3, чтобы следующий ведущий элемент был равен 1. Затем выполняем:

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$$

Пример 1: завершение прямого хода

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - 2z = -4, \\ -7z = -21. \end{cases}$$

Система имеет ступенчатый вид. Противоречий нет, и для каждого неизвестного есть ведущий элемент.

Следовательно, обратный ход определит x, y и z единственным образом.

Пример 1: обратный ход и проверка

$$-7z = -21 \implies z = 3, \qquad y - 2 \cdot 3 = -4 \implies y = 2$$

$$x + 2 + 3 = 6 \implies x = 1$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Проверка по исходной системе:

$1 + 2 + 3 = 6, \quad 2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3, \quad 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2.$

Пример 2: несовместная система

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$. Получим:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Последняя строка означает 0 = 1. Это противоречие, поэтому решений нет.

Обратный ход выполнять не требуется: несовместность уже установлена.

Пример 3: бесконечное семейство решений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 4y - 2z = 6. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

После $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ остаётся одно условие: $x + 2y - z = 3$. Неизвестные y и z свободны.

$$y = s, \quad z = t, \quad x = 3 - 2s + t, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Каждый выбор параметров s и t задаёт решение. Других решений нет.

Общее решение и свободные неизвестные

В предыдущем примере общее решение имеет вид $(3 - 2s + t,\ s,\ t)$. Два параметра отвечают двум свободным неизвестным.

$$s = 0,\ t = 0 \implies (3, 0, 0)$$

$$s = 1,\ t = 2 \implies (3, 1, 2)$$

Несколько частных решений показывают совместность, но не заменяют описание всего семейства.

Однородная система и ненулевые решения

$$x + 2y - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x, y, z) = (-2s + t,\ s,\ t)$$

При $s = t = 0$ получаем нулевое решение. При $s = 1$, $t = 0$ получаем ненулевое решение $(-2, 1, 0)$.

Если в однородной системе неизвестных больше, чем уравнений, хотя бы одно неизвестное будет свободным.

Следовательно, такая система над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ имеет ненулевые решения.

Система с параметрами

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + ay = b. \end{cases} \qquad (a-1)y = b - 1$$

Если $a \neq 1$, решение единственно:
$y = (b-1)/(a-1), \quad x = (a-b)/(a-1).$

Если $a = 1$ и $b = 1$, остаётся $x + y = 1$: бесконечно много решений.

Если $a = 1$ и $b \neq 1$, возникает противоречие: решений нет.

Нулевой элемент и перестановка строк

$$\begin{cases} 2y = 4, \\ 3x - y = 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Первый элемент равен нулю, но ниже в том же столбце стоит 3. Переставим строки и продолжим исключение.

$$y = 2, \qquad 3x - 2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Один нулевой элемент сам по себе не означает несовместность системы.

Метод исключения в истории математики

Идея последовательного исключения неизвестных встречается в древнекитайском трактате «Математика в девяти книгах».

Коэффициенты задач располагали в прямоугольных таблицах и преобразовывали их, чтобы последовательно находить неизвестные.

Современная запись через расширенную матрицу позволяет единообразно исследовать системы любого размера.

Источник: Harvard, Math 21b, Nine Chapters exhibit. Ссылка в конце лекции.

Типичные ошибки в методе Гаусса

Правая часть	Преобразование относится ко всей строке, включая число после вертикальной черты.
Деление на нуль	Перед делением проверяют ведущий элемент. При необходимости строки переставляют.
Нулевая строка	Равенство 0 = 0 не является противоречием и не запрещает свободные неизвестные.
Неполный ответ	Если остаются свободные неизвестные, записывают всё семейство решений.

Самостоятельная работа

1. Решите систему $x + y = 5$, $2x - y = 1$.

2. Найдите все решения системы $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 6$.

3. Исследуйте совместность: $x - y = 1$, $2x - 2y = 3$.

4. Исследуйте систему $x + y = 2$, $x + \lambda y = \lambda$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Укажите преобразования строк и выполните проверку найденных решений.

Ответы к самостоятельной работе

1. $(x, y) = (2, 3)$. Проверка: $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 - 3 = 1$.

2. $(x, y, z) = (3 - 2s + t,\ s,\ t)$, где $s, t \in \mathbb{R}$.

3. После $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ получаем $0 = 1$. Решений нет.

4. При $\lambda \neq 1$: $x = \lambda/(\lambda - 1)$, $y = (\lambda - 2)/(\lambda - 1)$.
При $\lambda = 1$ возникает $0 = -1$, поэтому решений нет.

Основные результаты и контрольные вопросы

Метод Гаусса приводит систему к ступенчатому виду с сохранением всех решений.

1. Какие преобразования уравнений сохраняют множество решений?
2. Как отличить противоречие от тождественно нулевой строки?
3. Как определить ведущие и свободные неизвестные?
4. Почему однородная система всегда совместна?
5. Как записать все решения системы с параметрами?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Harvard, Math 21b: The Nine Chapters and elimination.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.