Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 10

Векторная алгебра

Геометрические векторы и действия над ними
Критерии коллинеарности двух векторов

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 3. Векторная алгебра

Цель и план лекции

Цель: выполнять геометрические и координатные действия над векторами и проверять коллинеарность.

Геометрические операции

Равенство и перенос векторов.
Сложение и вычитание.
Умножение на число.

Координатные критерии

Компоненты и длина вектора.
Коллинеарность в плоскости и пространстве.
Проверка расположения точек.

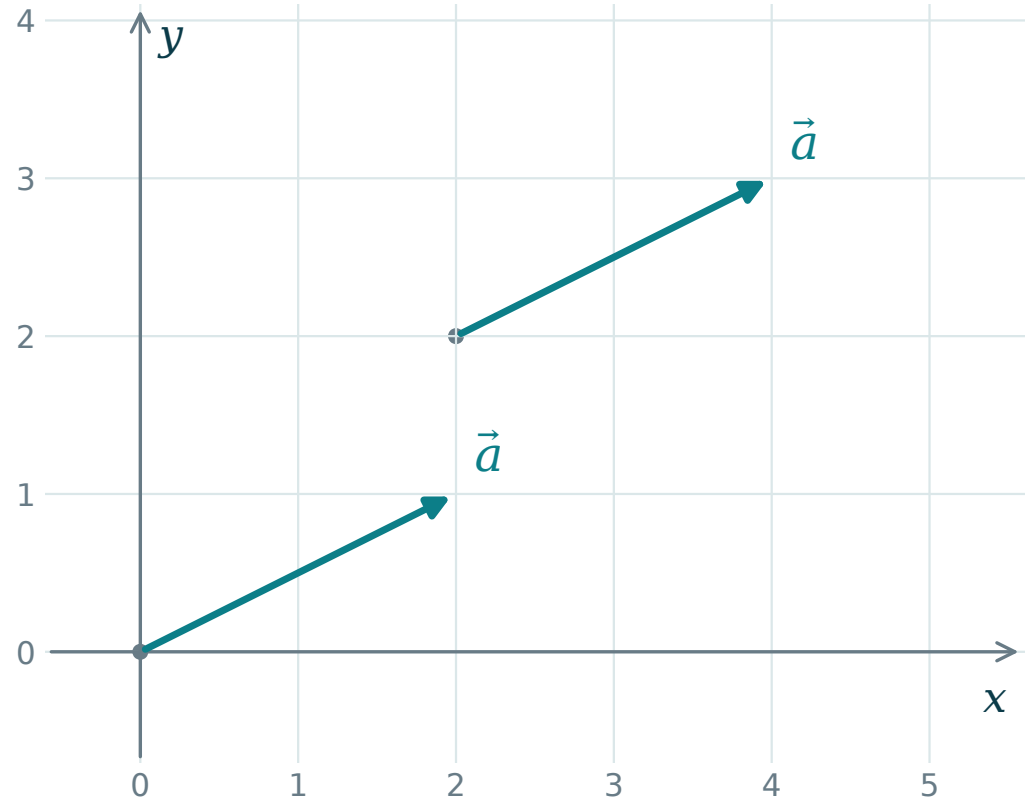
В этой лекции рассматриваем действительные геометрические векторы плоскости и трёхмерного пространства.

Направленный отрезок и свободный вектор

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ имеет начало A и конец B. Его длина равна длине отрезка AB.

Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе. При переносе сохраняются длина и направление.

На рисунке две стрелки представляют один свободный вектор.



Равные, противоположные и нулевой векторы

Два ненулевых вектора равны, если имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Противоположные ненулевые векторы имеют одинаковую длину и противоположные направления.

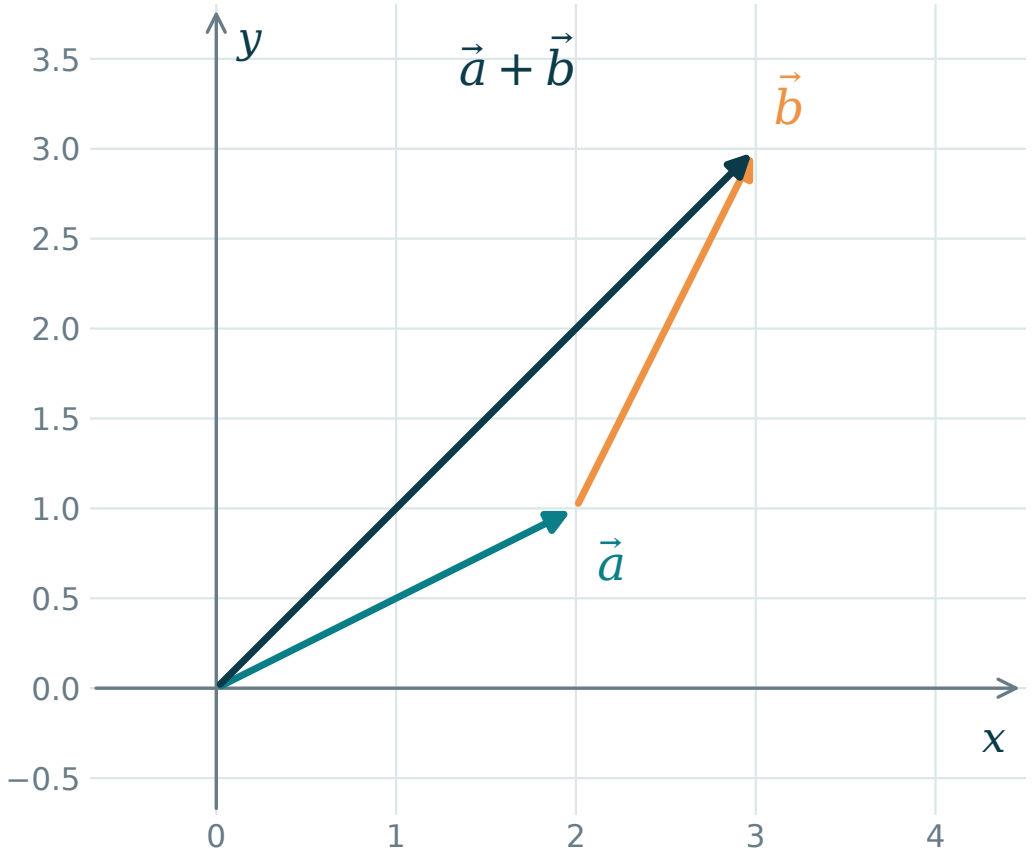
Нулевой вектор имеет длину 0. Его начало и конец совпадают, а направление не определено.

Сложение по правилу треугольника

Начало второго вектора совмещают с концом первого. Сумма соединяет начало первого с концом второго.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Операция описывает итог двух последовательных перемещений.

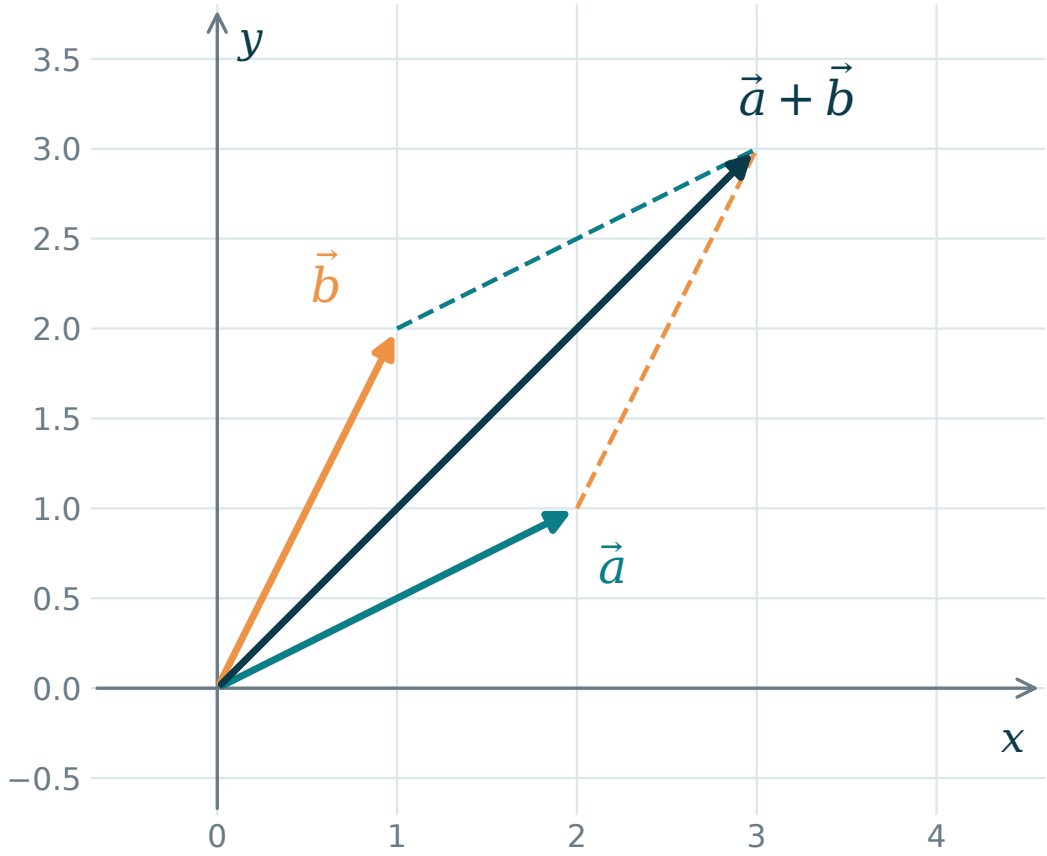


Сложение по правилу параллелограмма

Оба вектора откладывают от одной точки. Диагональ построенного параллелограмма является их суммой.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Геометрическая конструкция согласуется с аксиомой коммутативности сложения.



Сумма нескольких векторов

Векторы можно последовательно откладывать один за другим. Итоговый вектор соединяет начало цепочки с её концом.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

Для замкнутого контура итоговое перемещение равно нулю:

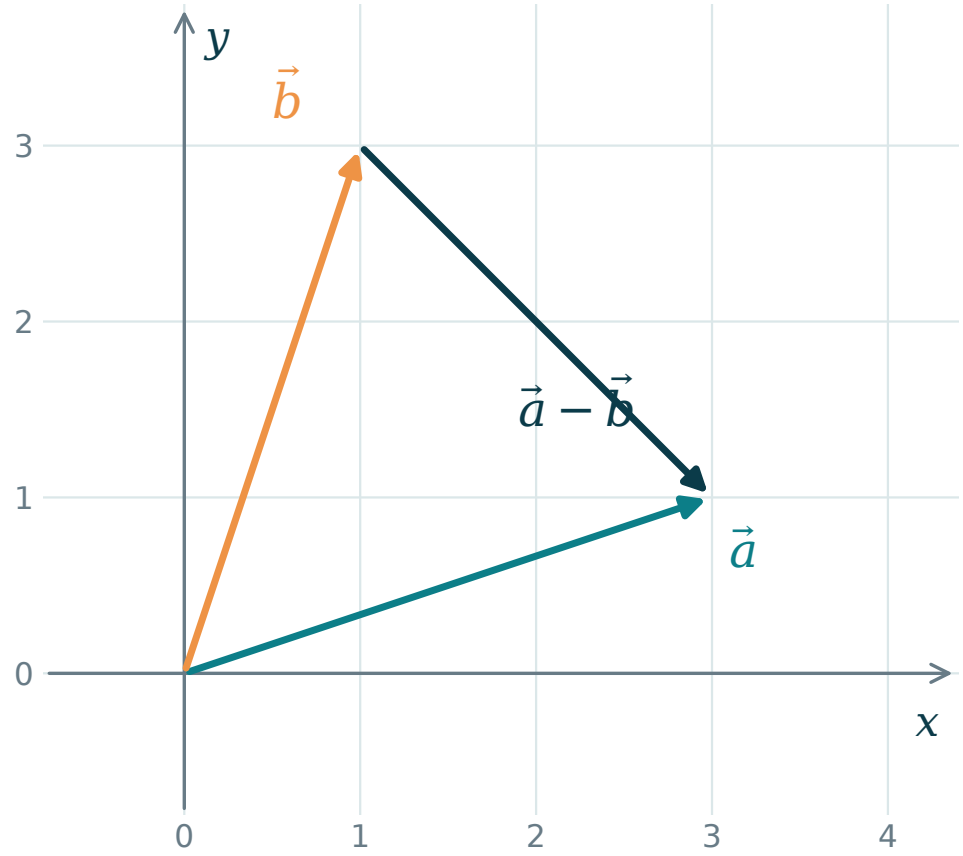
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

Вычитание векторов

Разность определяют через противоположный вектор:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Если оба вектора имеют общее начало, разность направлена от конца вычитаемого вектора b к концу вектора a.



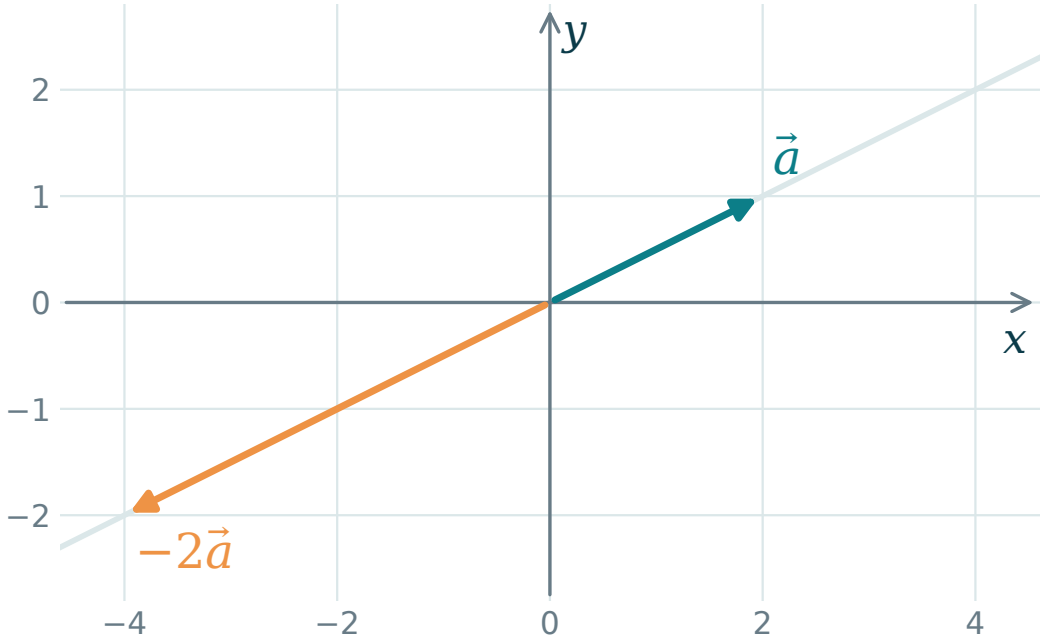
Умножение геометрического вектора на число

При умножении на λ длина изменяется в $|\lambda|$ раз:

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

Если оба вектора ненулевые, при $\lambda > 0$ направление сохраняется, при $\lambda < 0$ меняется на противоположное.

При $\lambda = 0$ получается нулевой вектор.



Алгебраические свойства векторных действий

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \qquad \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

Геометрические векторы с этими действиями образуют действительное векторное пространство.

Действия в координатах

В стандартном базисе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Действия выполняются по компонентам:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Для плоскости используют те же правила с двумя координатами.

Пример координатного вычисления

$$\vec{a} = (1, -2, 3), \qquad \vec{b} = (2, 1, -1)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2, -4, 6) - (2, 1, -1) = (0, -5, 7)$$

В каждой координате сначала выполняем умножение на число, затем вычитание. Знак минус относится ко всем компонентам второго вектора.

Ответ снова является вектором того же пространства.

Координаты вектора по началу и концу

Если $A = (x_A, y_A, z_A)$ и $B = (x_B, y_B, z_B)$, то:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (3, -2, 1) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (2, -4, 1)$$

Всегда вычитают координаты начала из координат конца.

Длина и единичный вектор

В прямоугольной декартовой системе координат длину находят по теореме Пифагора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (\vec{a} \neq \vec{0})$$

Вектор $\vec{e}$ имеет длину 1 и направлен так же, как $\vec{a}$. Например, для $(3, 4)$ получаем $(3/5, 4/5)$.

Коллинеарность двух векторов

Два ненулевых вектора называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Эквивалентно: после переноса к общему началу они лежат на одной прямой.

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору. Направление нулевому вектору при этом не приписывают.

Коллинеарные векторы могут иметь разные длины.

Критерий через скалярный множитель

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ коллинеарны} \iff \vec{b} = \lambda \vec{a} \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{R}$$

В прямом утверждении выбираем отношение длин со знаком, учитывающим направление. Обратное утверждение следует из определения умножения на число.

Условие ненулевого опорного вектора существенно. Пару с нулевым вектором можно проверить отдельно.

Коллинеарность и линейная зависимость

Пара геометрических векторов коллинеарна тогда и только тогда, когда она линейно зависима.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Если один вектор нулевой, зависимость очевидна. Если оба ненулевые, из нетривиальной связи можно выразить один как кратное другого.

Так геометрическое условие связывается с понятием из лекции 8.

Координатный критерий на плоскости

Для $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ коллинеарность эквивалентна нулевому определителю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

При ненулевом определителе пара независима и образует базис плоскости. Критерий с определителем учитывает и нулевые векторы.

Пример коллинеарности на плоскости

$$\vec{a} = (2, -1), \qquad \vec{b} = (-6, 3)$$

$$2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-6) = 0$$

$$\vec{b} = -3\vec{a}$$

Векторы коллинеарны и противоположно направлены. Длина b втрое больше длины a.

Координатный критерий в пространстве

Для $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ должны одновременно обращаться в нуль все миноры второго порядка:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0$$

Это равносильно рангу не выше 1 у матрицы, составленной из двух векторов.

Одного нулевого минора недостаточно

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \qquad \vec{b} = (2, 2, 1)$$

Для первых двух координат определитель равен нулю:

$$1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Но для первой и третьей координат:

$$1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{векторы неколлинеарны}$$

Пропорции и нулевые координаты

Самый надёжный способ проверить кратность: найти одно число λ, удовлетворяющее всем равенствам $b_i = \lambda a_i$.

$$\vec{a} = (0, 2, -1), \qquad \vec{b} = (0, 6, \mu)$$

$$6 = 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3, \qquad \mu = -3$$

Первое равенство $0 = \lambda \cdot 0$ выполнено автоматически. Отношение $0/0$ не используют.

Условие коллинеарности с параметром

$$\vec{a} = (1, 2), \qquad \vec{b} = (t, 6)$$

$$1 \cdot 6 - 2t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 3$$

Проверяем найденное значение через скалярный множитель:

$$\vec{b} = (3, 6) = 3(1, 2) = 3\vec{a}$$

Три точки на одной прямой

Для различных A и B точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны.

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (3, -2, 1), \quad C = (5, -6, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (4, -8, 2) = 2\overrightarrow{AB}$$

Следовательно, точки лежат на одной прямой. B этом примере B находится посередине между A и C.

Направляющие векторы параллельных прямых

Направление прямой можно задавать любым её ненулевым направляющим вектором.

Если ненулевые направляющие векторы двух прямых коллинеарны, прямые параллельны или совпадают.

$$(1, 2, -1) \quad \text{и} \quad (-3, -6, 3) = -3(1, 2, -1)$$

Одно направление ещё не определяет положение прямой: нужна также точка, через которую она проходит.

Разложение по двум неколлинеарным векторам

Любые два неколлинеарных вектора плоскости образуют её базис. Каждый вектор плоскости единственным образом раскладывается по ним.

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (-1, 1), \quad \vec{w} = (3, 3)$$

$$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

Проверка по координатам: 2(2,1) + (-1,1) = (3,3). Ненулевой определитель пары u, v равен 3.

Решение векторного уравнения

Пусть заданы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Решим уравнение $3\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$.

$$2\vec{x} = \vec{b} - 3\vec{a}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$$

Разрешено умножение на обратный ненулевой скаляр. Операция деления одного вектора на другой здесь не определяется.

Типичные ошибки

Коллинеарность	Коллинеарные векторы могут быть противоположно направлены и иметь разные длины.
Нулевой вектор	Он коллинеарен любому вектору, но не имеет направления.
Пропорции	Нельзя делить на нулевые координаты. Проверяют равенства с общим скалярным множителем.
Пространство	В трёхмерном случае одного нулевого минора недостаточно.

Самостоятельная работа

1. Для $\vec{a} = (1, -2, 3)$ и $\vec{b} = (2, 1, -1)$ найдите $2\vec{a} - \vec{b}$.

2. При каком μ векторы $(0, 2, -1)$ и $(0, 6, \mu)$ коллинеарны?

3. Лежат ли на одной прямой A(0,1,2), B(1,3,1), C(3,7,-1)?

4. Коллинеарны ли векторы $(1, 0, 2)$ и $(3, 1, 6)$?

5. Найдите единичный вектор, направленный так же, как $(6, 8)$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $2\vec{a} - \vec{b} = (0, -5, 7)$.

2. $\mu = -3$, поскольку второй вектор должен равняться утроенному первому.

3. Да: $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 6, -3) = 3\overrightarrow{AB}$.

4. Нет: для первых двух координат минор равен $1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 1$.

5. Длина равна 10, единичный вектор равен $(3/5, 4/5)$.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Чем свободный вектор отличается от его конкретного изображения?
2. Как построить сумму и разность двух векторов?
3. Как знак скаляра влияет на направление вектора?
4. Как связаны коллинеарность и линейная зависимость пары?
5. Какие миноры нужно проверять в трёхмерном пространстве?
6. Как по векторам AB и AC проверить расположение трёх точек?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Название электронного курса содержит активную ссылку.