Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 2

Тригонометрическая форма и формула Муавра

Аргумент комплексного числа
Возведение в степень и извлечение корней

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 1. Поле комплексных чисел

Цель и план лекции

Цель: использовать модуль и аргумент для умножения, деления, возведения в целую степень и нахождения всех корней.

Новые понятия

Аргумент и главное значение аргумента.
Тригонометрическая форма.
Корни n-й степени.

Основные результаты

Формула Муавра и её доказательство.
Алгоритм вычисления степеней.
Геометрия корней комплексного числа.

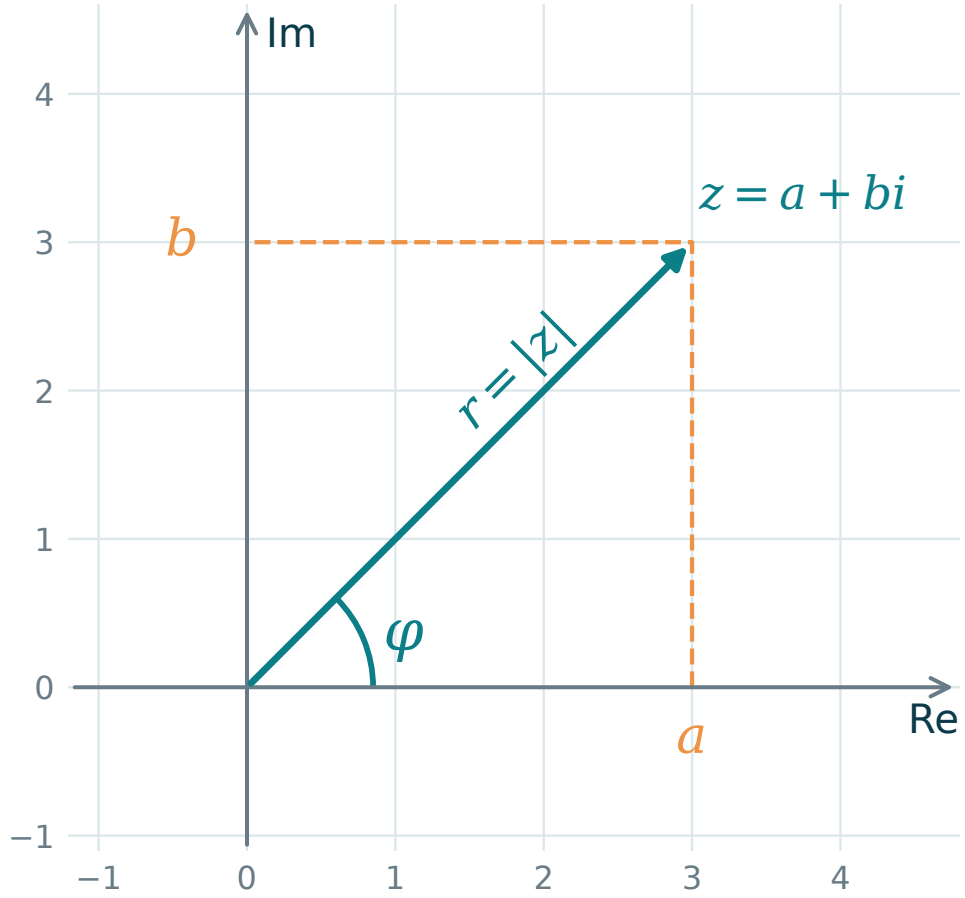
Исходные знания: $z = a + bi$, $i^2 = -1$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Полярные координаты комплексного числа

Пусть $z = a + bi \neq 0$. Число можно задать длиной $r = |z|$ и углом φ от положительного направления действительной оси.

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

Положительное направление отсчёта угла: против часовой стрелки. Угол измеряем в радианах.



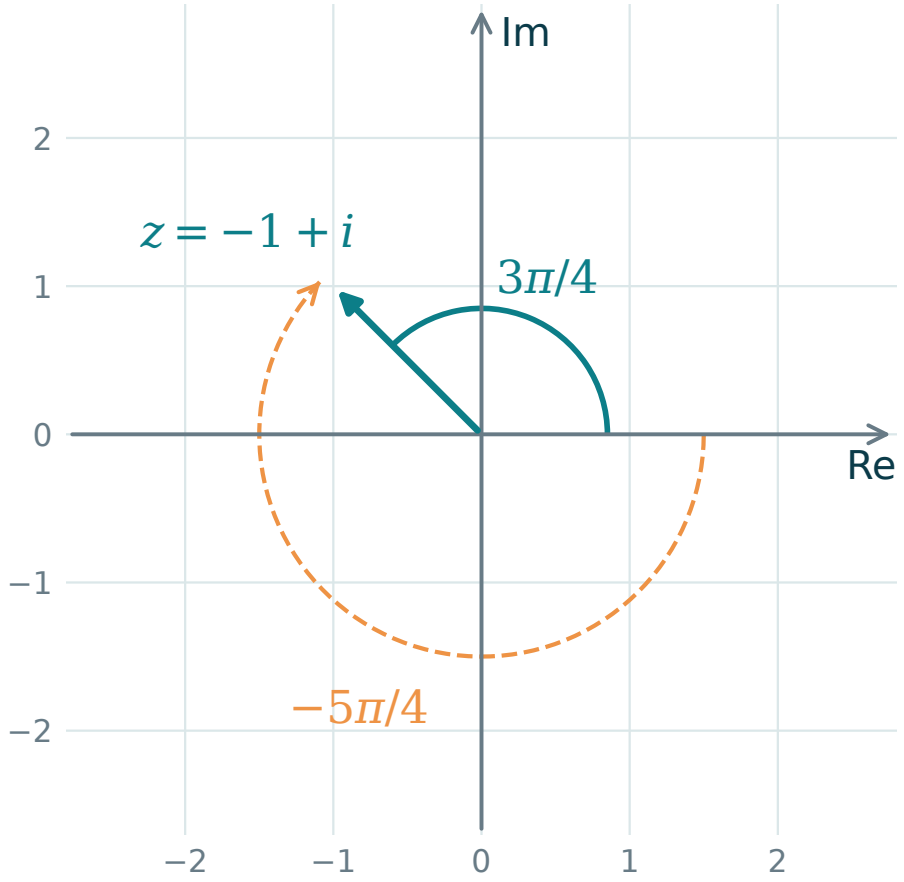
Аргумент и главное значение аргумента

Аргумент φ числа $z \neq 0$ задаёт направление его радиус-вектора. Полный оборот не меняет направление.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

В этой лекции выбираем $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$. Главное значение единственно.

У числа 0 аргумент не определён.



Как определить аргумент по координатам

При $a \neq 0$ равенство $\tan\varphi = b/a$ определяет угол с точностью до π. Поэтому обязательно учитываем четверть.

Расположение	Условия	Главное значение Arg z
Правая полуплоскость	$a > 0$	$\arctan(b/a)$
II четверть	$a < 0,\ b > 0$	$\arctan(b/a) + \pi$
III четверть	$a < 0,\ b < 0$	$\arctan(b/a) - \pi$
Мнимая ось	$a = 0,\ b \neq 0$	$\pi/2$ при $b > 0$, $-\pi/2$ при $b < 0$
Отрицательная полуось	$a < 0,\ b = 0$	π

Пример: для $z = -1 + i$ имеем $\arctan(-1) = -\pi/4$, но $\operatorname{Arg} z = 3\pi/4$.

Тригонометрическая форма

Подставим $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$ в алгебраическую запись $z = a + bi$.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r = |z| > 0$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

Модуль определён однозначно. Аргумент можно заменить на любой угол, отличающийся на целое число полных оборотов.

Для 0 можно формально положить r = 0, но его аргумент не определяют.

Тригонометрическая форма: примеры

$z = -\sqrt{3} + i \quad r = 2$, II четверть, $\varphi = 5\pi/6$.

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$z = -1 - i \quad r = \sqrt{2}$, III четверть, $\varphi = -3\pi/4$.

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$z = -2i \quad r = 2$, отрицательная мнимая полуось.

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Умножение в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ и $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$. После раскрытия скобок:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\big].$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$$

Модули перемножаются, аргументы складываются.

Геометрический смысл умножения

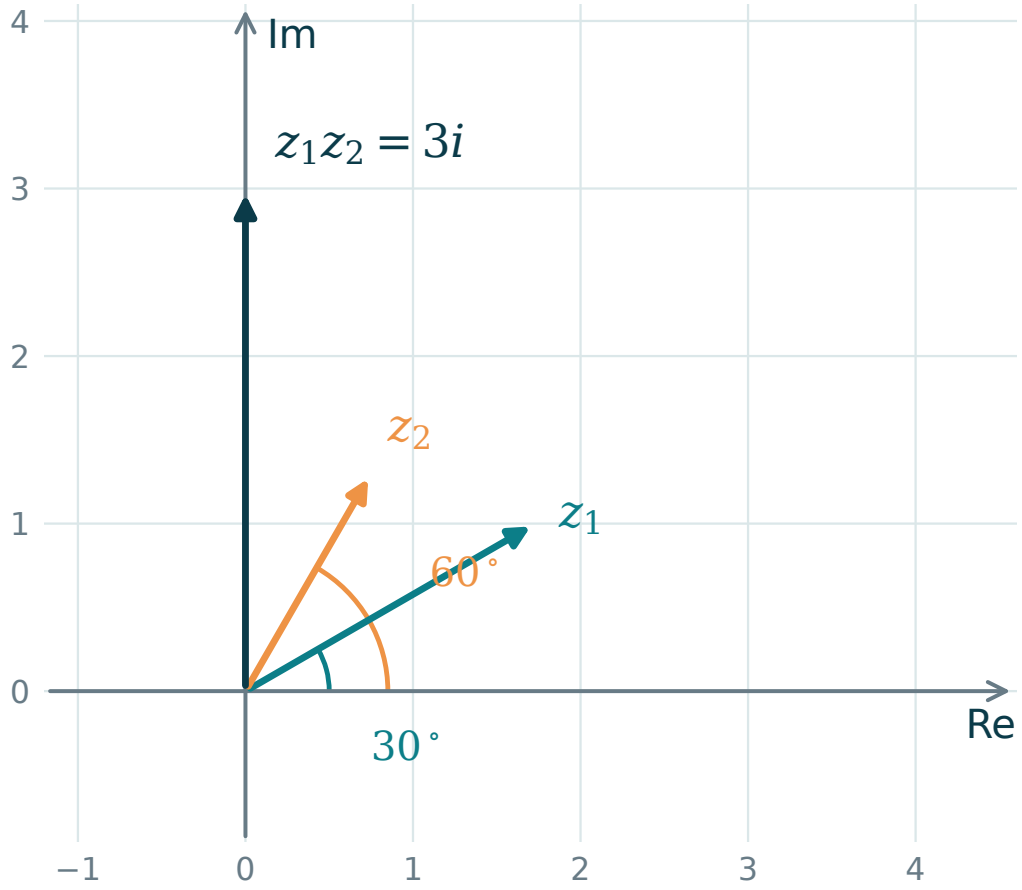
Умножение на фиксированное ненулевое число поворачивает вектор и изменяет его длину.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

В примере итоговый угол равен 90°, а длина равна 3.



Деление в тригонометрической форме

При $z_2 \neq 0$ модули делятся, аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta))$$

Пример: $z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$,
$z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

$$\frac{\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}\,i} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Формула Муавра

При многократном умножении модуль возводится в степень, а аргумент умножается на показатель.

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Здесь $n \in \mathbb{N}$. Формула позволяет вычислять большие степени без многократного раскрытия скобок.

Абрахам де Муавр (1667-1754) связывал тригонометрию с вычислениями над комплексными числами в работах начала XVIII века.

Исторический источник: MacTutor, Abraham de Moivre. Ссылка в конце лекции.

Доказательство формулы Муавра по индукции

Обозначим $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$. При $n = 1$ утверждение очевидно.

Предположим, что $u^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Тогда:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n u \\ &= (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из формул сложения синуса и косинуса. Умножение на r^n даёт формулу для $z = ru$.

Нулевая и отрицательные целые степени

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тогда $z^0 = 1$. Для $m \in \mathbb{N}$ определяем $z^{-m} = 1/z^m$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

При $z = 0$ определены положительные целые степени. Отрицательные степени и выражение 0^0 здесь не рассматриваются.

Алгоритм возведения в степень

1. **Модуль** — Для $z = a + bi \neq 0$ вычислить $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Аргумент** — Найти φ, учитывая четверть и знаки a и b.
3. **Формула Муавра** — Вычислить r^n и угол $n\varphi$.
4. **Упрощение** — Заменить угол равным ему по модулю 2π и вычислить синус и косинус.
5. **Ответ** — При необходимости перейти к алгебраической форме $A + Bi$.

Пример: вычисление двенадцатой степени

Вычислим $(1+i)^{12}$. Модуль равен $\sqrt{2}$, аргумент равен $\pi/4$.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64$$

Проверка в алгебраической форме:

$$(1+i)^2 = 2i, \qquad (1+i)^{12} = (2i)^6 = 64\,i^6 = -64$$

Пример: выбор четверти и сокращение угла

Вычислим $(-\sqrt{3}+i)^4$. Число лежит во II четверти, поэтому $r=2$ и $\varphi = 5\pi/6$.

$$4\varphi = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

$$(-\sqrt{3}+i)^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$(-\sqrt{3}+i)^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$$

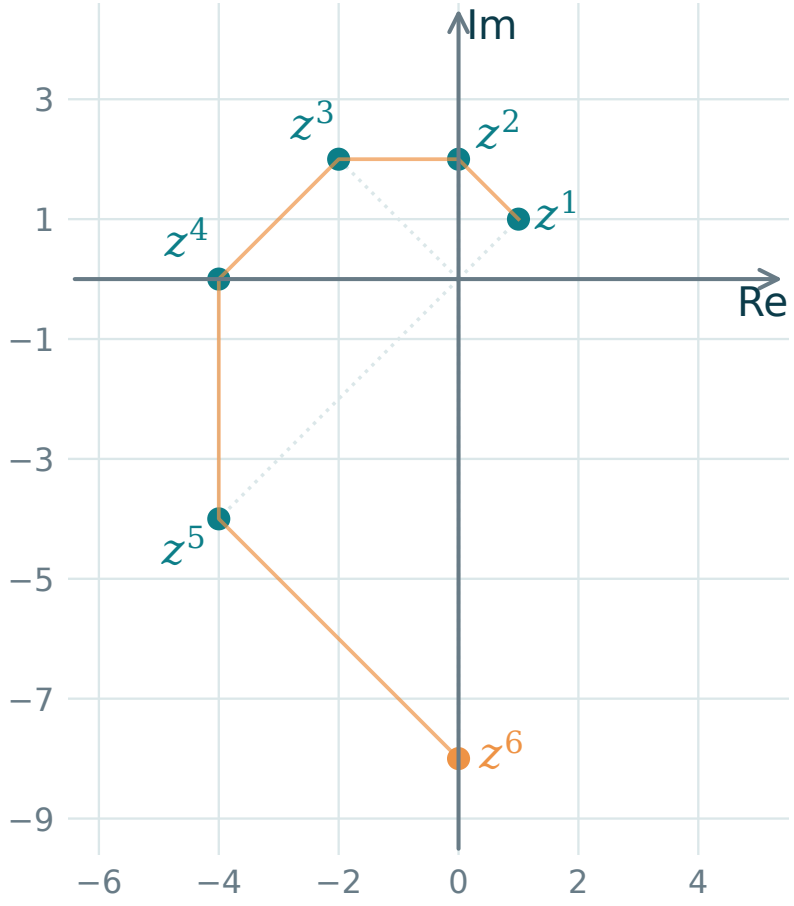
Геометрия степеней комплексного числа

Для $z = 1 + i$ при каждом умножении на z длина увеличивается в $\sqrt{2}$ раза, а угол увеличивается на $\pi/4$.

$$|z^n| = (\sqrt{2})^n$$

$$\arg(z^n) = \frac{n\pi}{4} + 2\pi k$$

На рисунке отмечены первые шесть степеней. Отрезки показывают порядок точек.



Следствие: формулы тройного угла

По формуле Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

Раскрывая куб по биному, получаем:

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

Приравниваем действительные и мнимые части:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

Корни n-й степени: постановка задачи

Возведение в степень по заданному z даёт одно число z^n. При извлечении корней задано число z, а требуется найти все w:

$$w^n = z, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

Пусть $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Его корни имеют вид:

$$w_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Здесь $k = 0, 1, \ldots, n-1$, а $\sqrt[n]{R}$ является положительным вещественным корнем.

Почему корней ровно n

Пусть $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho > 0$. Из равенства $w^n = z$ и формулы Муавра следует:

$$\rho^n = R, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt[n]{R}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

При $k = 0, \dots, n-1$ углы различны по модулю 2π. Замена k на $k+n$ повторяет тот же корень. Других решений нет.

Если $z = 0$, уравнение $w^n = 0$ имеет единственный различный корень $w = 0$.

Пример: кубические корни из 8

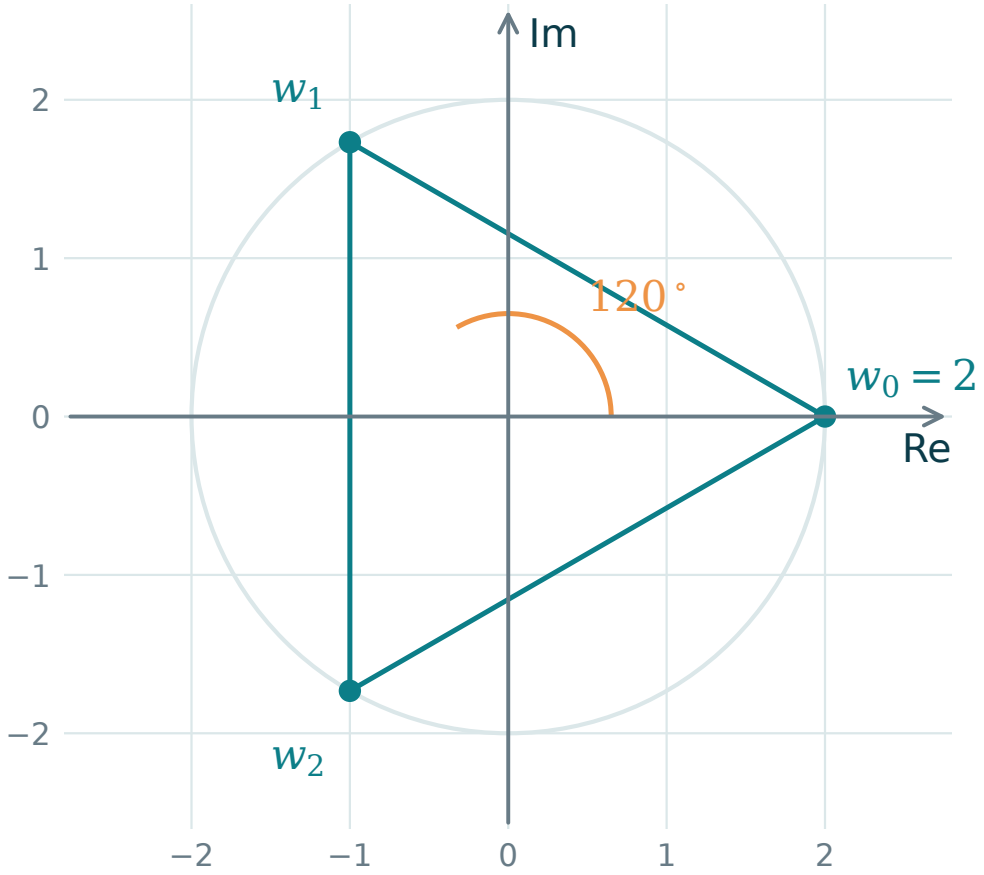
Решим $w^3 = 8$. Здесь $R = 8$, $\varphi = 0$, поэтому $|w| = 2$.

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = 2,$$

$$w_1 = -1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$



Корни образуют правильный треугольник на окружности радиуса 2.

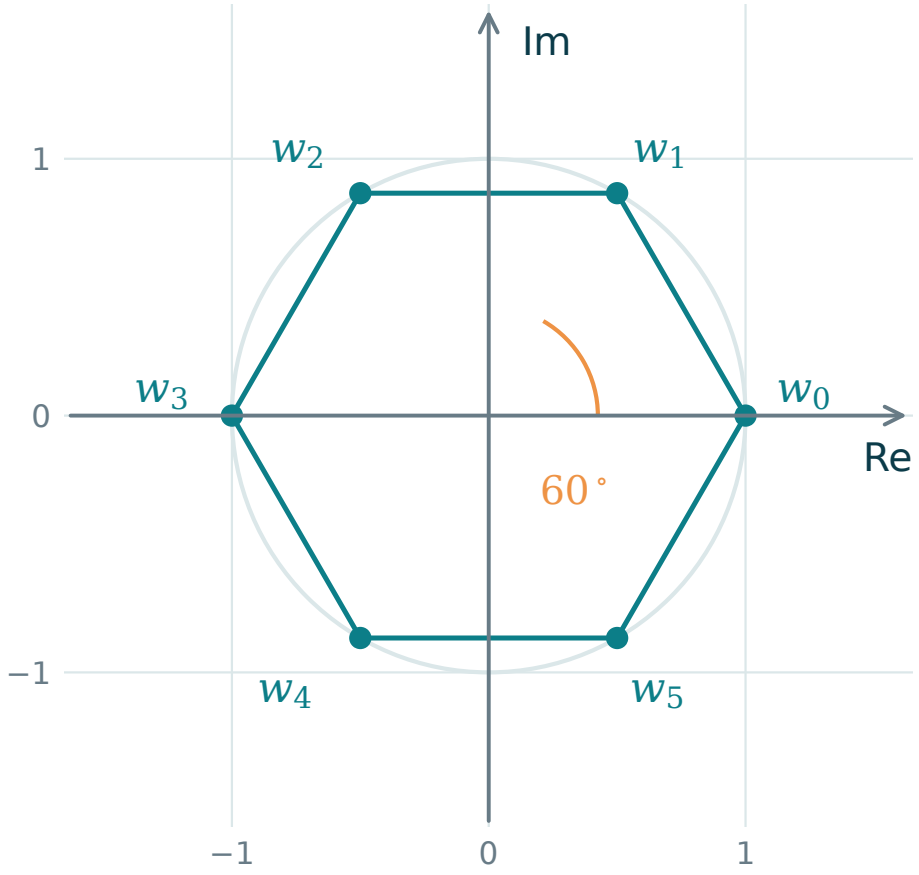
Корни из единицы

Решения $w^n = 1$ лежат на единичной окружности. Соседние корни отличаются поворотом на $2\pi/n$.

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

При $n = 6$ получаем правильный шестиугольник. Если $\omega = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$, корни равны:

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5$$

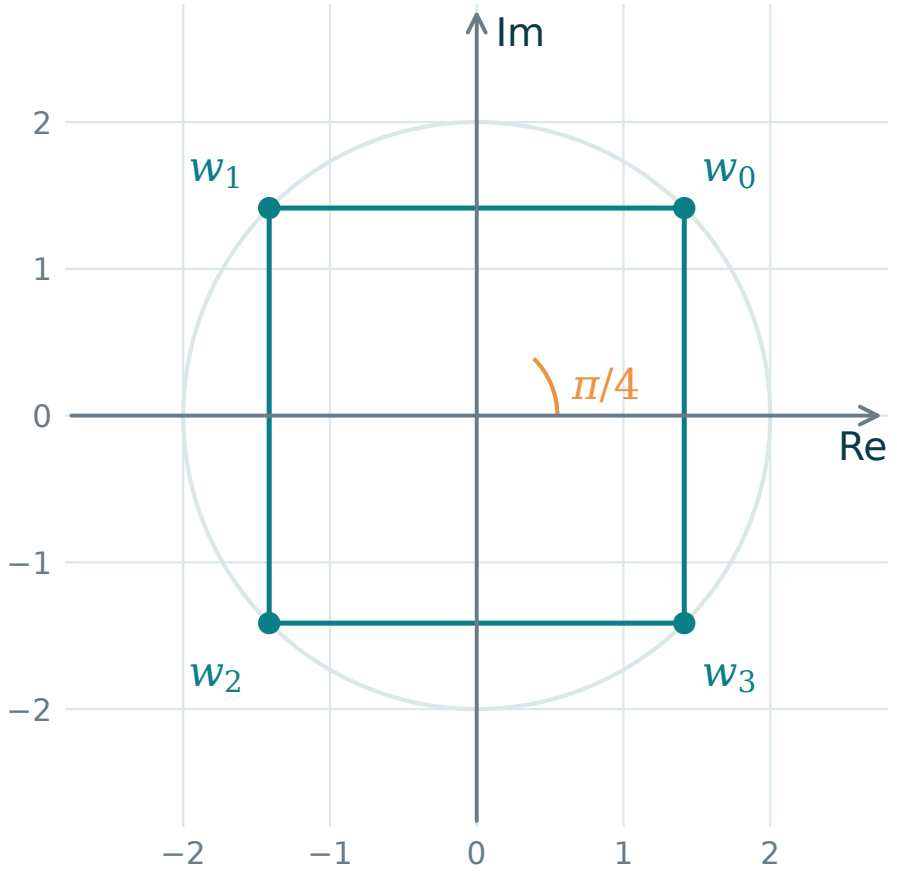


Пример: уравнение $w^4 = -16$

Решим $w^4 = -16$. Число -16 имеет модуль 16 и аргумент π.

$$|w| = 2, \qquad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ w_1 &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ w_2 &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\ w_3 &= \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$



Проверка: $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4i$,
значит $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^4 = -16$.

Типичные ошибки: аргумент, степень и корни

Четверть	Один арктангенс может дать неверное направление. Проверяем знаки a и b.
Модуль	В тригонометрической форме модуль r неотрицателен. Для $z \neq 0$ имеем $r > 0$.
Степень	У z^n угол равен $n\varphi$, а модуль равен r^n.
Все корни	Для $w^n = z \neq 0$ нужны n значений с $k = 0, \dots, n-1$. Угол делится на n целиком.

Самостоятельная работа

1. Запишите $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.
2. Вычислите $(\sqrt{3} + i)^6$.
3. Найдите $(1 - i)^{-4}$.
4. Найдите все решения уравнения $w^3 = -8$ и отметьте их на плоскости.
5. Выведите формулы $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$ из формулы Муавра.

При вычислениях указывайте модуль, аргумент и способ проверки ответа.

Ответы к самостоятельной работе

1. $z = 2\bigl(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\bigr)$.

2. $r = 2$, $\varphi = \pi/6$, поэтому $z^6 = 64\cos\pi = -64$.

3. $(1-i)^4 = -4$, следовательно $(1-i)^{-4} = -1/4$.

4. Модуль равен 2, углы: $\pi/3$, π, $5\pi/3$.
Корни: $1 + i\sqrt{3}$, -2, $1 - i\sqrt{3}$.

5. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Основные результаты и контрольные вопросы

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

1. Почему аргумент определён с точностью до полного оборота?
2. Как умножение и деление меняют модуль и аргумент?
3. Как доказать формулу Муавра без формулы Эйлера?
4. Почему ненулевое число имеет ровно n корней n-й степени?
5. Как проверить найденные корни и их расположение на плоскости?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Дополнительные материалы

T. Gantumur. Complex Numbers. McGill University, 2015.

MacTutor History of Mathematics: Abraham de Moivre.

O. Merino. A Short History of Complex Numbers, 2006.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.