Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 11

Координатные системы

Аффинные и декартовы координаты
Расстояния и скалярное произведение

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 4. Аналитическая геометрия

Цель и план лекции

Цель: задавать точки и векторы координатами, делить отрезки и вычислять расстояния, углы и проекции.

Координатный метод

Начало отсчёта и базис.
Аффинная и декартова системы.
Координаты точек и векторов.

Метрические задачи

Деление отрезка.
Расстояние между точками.
Скалярное произведение и проекции.

В этой лекции работаем с действительными векторами плоскости и пространства.

Аффинная система координат

Аффинную систему задают точкой O и упорядоченным базисом $e_1, \dots, e_n$, где $n = 2$ или $n = 3$.

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Числа $x_1, \dots, x_n$ называют координатами точки M. Базис гарантирует существование и единственность разложения.

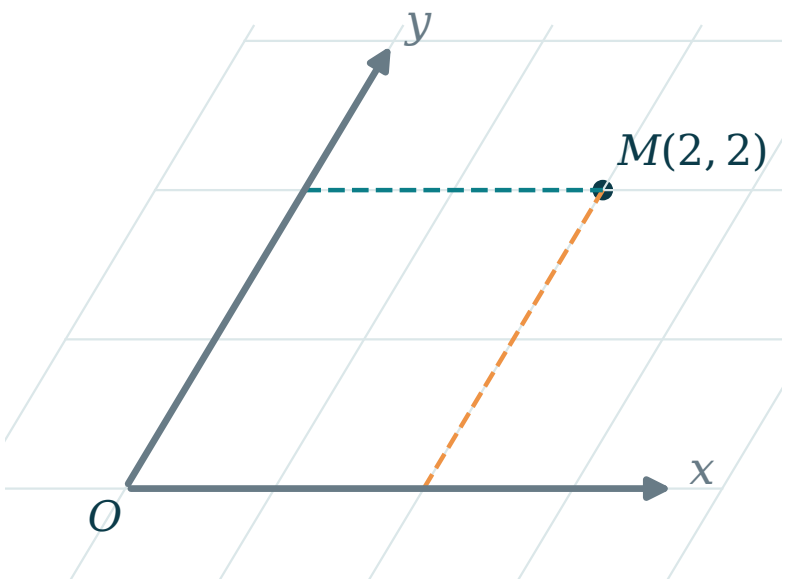
Векторы базиса могут иметь разные длины и образовывать непрямые углы.

Точка и вектор в координатах

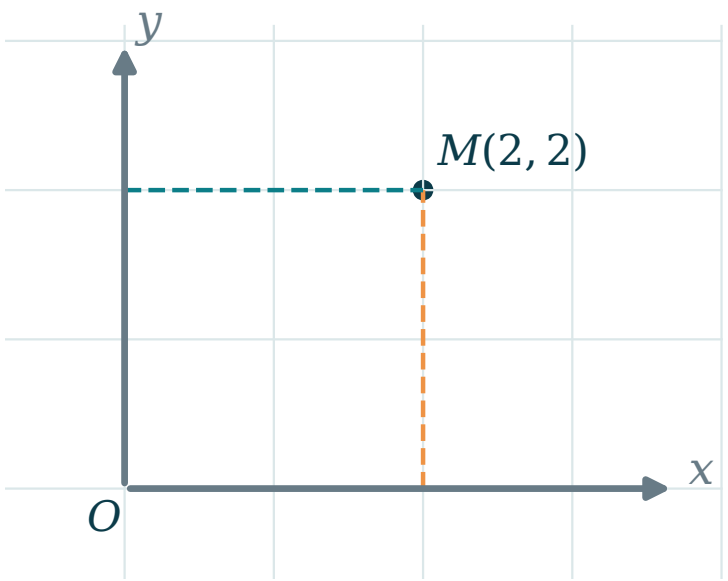
Точка M	Её координаты задают радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ и зависят от начала O.
Вектор a	Его координаты являются коэффициентами разложения по векторам базиса.
Перенос начала	Изменяет координаты точек. При том же базисе координаты свободного вектора сохраняются.
Смена базиса	Изменяет числовые координаты точек и векторов.

Аффинная и декартова координатные сетки

Аффинная система



Декартова система



Один и тот же набор координат задаёт положение относительно выбранного начала и базиса. Форма координатной сетки зависит от базиса.

Пример аффинных координат

В исходной декартовой системе заданы $O = (1, -1)$, $e_1 = (2, 0)$ и $e_2 = (1, 1)$. Точка M имеет аффинные координаты (2,3).

$$\overrightarrow{OM} = 2e_1 + 3e_2 = (7, 3)$$

$$M = (1, -1) + (7, 3) = (8, 2)$$

Координаты M в двух системах различаются. Геометрическая точка остаётся той же.

Координаты вектора по двум точкам

Пусть A и B заданы в одной аффинной системе. Вычитаем разложения $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$$

Например, $A = (1, 2, -1)$, $B = (4, 6, 11)$ дают $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12)$.

Формула разности координат верна и в косоугольном базисе.

Линейные действия в любом базисе

Сложение векторов и умножение на число выполняют по координатам независимо от углов и длин базисных векторов.

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a_1 + \beta b_1, \dots, \alpha a_n + \beta b_n)$$

Если $a = (2, -1)$ и $b = (-1, 3)$, то $2a + b = (3, 1)$.

Для сложения и линейных комбинаций ортонормированность базиса не требуется.

Переход к другой аффинной системе

Пусть o задаёт координаты нового начала O' в старой системе. Столбцы S содержат координаты нового базиса в старом.

$$x_{\text{стар}} = o + S x_{\text{нов}}, \qquad a_{\text{стар}} = S a_{\text{нов}}$$

$$x_{\text{нов}} = S^{-1}(x_{\text{стар}} - o), \qquad \det S \neq 0$$

В формуле для свободного вектора слагаемого o нет. Оно появляется при переходе между координатами точек.

Прямоугольная декартова система

Декартова система является аффинной системой с ортонормированным базисом: базисные векторы единичны и попарно перпендикулярны.

$$e_i \cdot e_i = 1, \qquad e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

В такой системе длины, расстояния и углы выражаются через обычные суммы произведений координат.

В трёхмерном пространстве далее используем правую декартову систему.

Длина вектора в декартовых координатах

По теореме Пифагора для взаимно перпендикулярных составляющих:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \text{на плоскости}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad \text{в пространстве}$$

Для $a = (3, 4, 12)$ получаем $|a| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$.

Длина в косоугольном базисе

Пусть $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ в декартовых координатах. Вектор $v = e_1 + e_2$ имеет в этом базисе координаты (1,1).

$$v = (2, 1)_{\text{дек}}, \qquad |v| = \sqrt{5} \neq \sqrt{1^2 + 1^2}$$

В общем базисе нужно учитывать длины базисных векторов и углы между ними.

$$|v|^2 = \sum_{i,j} x_i x_j (e_i \cdot e_j)$$

Расстояние между двумя точками

Расстояние $\rho(A, B)$ равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$. Все координаты здесь декартовы.

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Сначала находят разности координат, затем длину полученного вектора.

На плоскости в формуле остаются только первые два слагаемых.

Пример вычисления расстояния

$$A = (1, 2, -1), \qquad B = (4, 6, 11)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12)$$

$$\rho(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Знак отдельной разности не влияет на расстояние, поскольку разности возводят в квадрат.

Точки отрезка и параметр

Точка M лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда её радиус-вектор представляется следующим образом:

$$M = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB, \qquad 0 \le t \le 1$$

При $t = 0$ получаем A, при $t = 1$ получаем B. При $0 < t < 1$ точка лежит внутри отрезка.

Эта запись обозначает равенство координатных столбцов точек.

Внутреннее деление отрезка

Если $AM : MB = m : n$, где $m, n > 0$, то $t = m/(m+n)$.

$$M = \frac{nA + mB}{m + n}$$

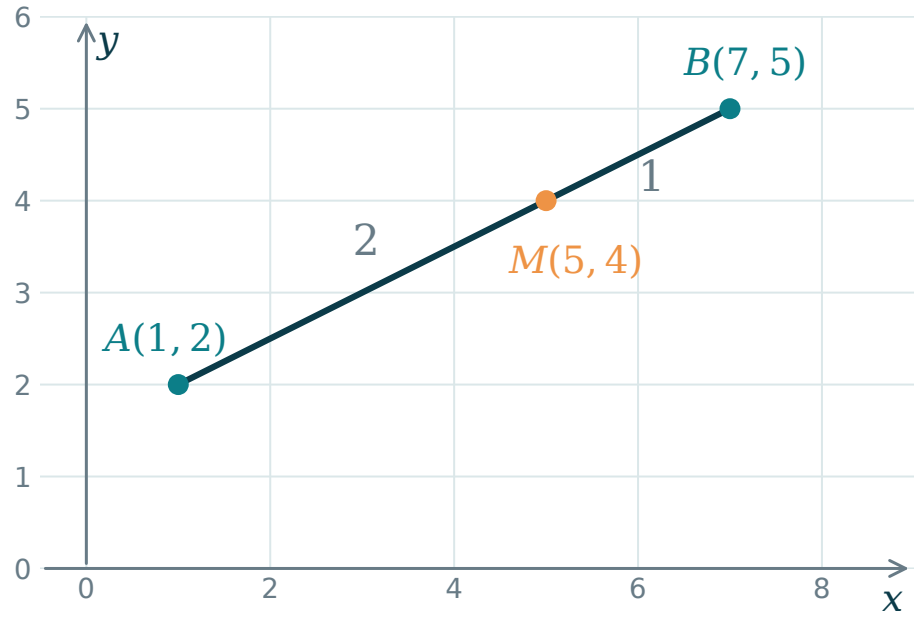
Например, $x_M = (nx_A + mx_B)/(m+n)$. Для остальных координат формула такая же.

Вес координат B равен m. Чем ближе точка M к B, тем больше этот вес.

Деление отрезка в отношении 2 к 1

Пусть $A = (1, 2)$, $B = (7, 5)$ и $AM : MB = 2 : 1$.

$$M = \frac{A + 2B}{3} = (5, 4)$$



Точка находится на $2/3$ пути от A к B.

Проверка: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

Середина отрезка

При $m = n$ точка M является серединой отрезка AB.

$$M = \frac{A + B}{2}$$

Для $A = (1, 2, -1)$ и $B = (4, 6, 11)$ получаем $M = (5/2, 4, 5)$.

Формулы деления отрезка верны в любой аффинной системе координат.

Внешнее деление отрезка

При внешнем делении M лежит на прямой AB вне отрезка. Пусть $AM : MB = m : n$, $m, n > 0$, $m \neq n$.

$$M = \frac{mB - nA}{m - n}$$

Для $A = (1, 2)$, $B = (7, 5)$ и отношения $2 : 1$ получаем $M = 2B - A = (13, 8)$.

Здесь $t = 2$. При $m > n$ точка лежит за B, при $m < n$ лежит за A.

Центр тяжести треугольника

Точка пересечения медиан треугольника имеет координаты, равные средним арифметическим координат вершин.

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

Если $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 3)$, то $G = (2, 1)$.

Каждую медиану точка G делит в отношении 2:1, считая от вершины.

Скалярное произведение

Для ненулевых векторов a и b обозначим угол между ними через φ, где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\varphi$$

Скалярное произведение является действительным числом и может быть положительным, нулевым или отрицательным.

Если хотя бы один вектор нулевой, скалярное произведение равно нулю.

Координатная формула произведения

В ортонормированном базисе раскрываем произведение линейных комбинаций и учитываем попарную перпендикулярность базисных векторов.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Например, $(1, 2, -1) \cdot (3, 0, 4) = 3 + 0 - 4 = -1$.

Для произвольного базиса формула содержит коэффициенты $e_i \cdot e_j$.

Свойства скалярного произведения

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha(a \cdot c) + \beta(b \cdot c)$$

$$a \cdot a = |a|^2 \geq 0, \qquad a \cdot a = 0 \iff a = 0$$

Линейность по второму аргументу следует из симметрии и линейности по первому.

Критерий перпендикулярности

Для ненулевых векторов прямой угол соответствует нулевому косинусу. Нулевой вектор по соглашению ортогонален любому вектору.

$$a \perp b \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot b = 0$$

Например, $(2, 1) \cdot (-1, 2) = -2 + 2 = 0$.

Перпендикулярность проверяют через скалярное произведение, а не через пропорции координат.

Угол между двумя векторами

Для $a \neq 0$ и $b \neq 0$ угол определяют по косинусу.

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

При $a = (1, 1, 0)$ и $b = (1, 0, 1)$ произведение равно 1, а обе длины равны $\sqrt{2}$.

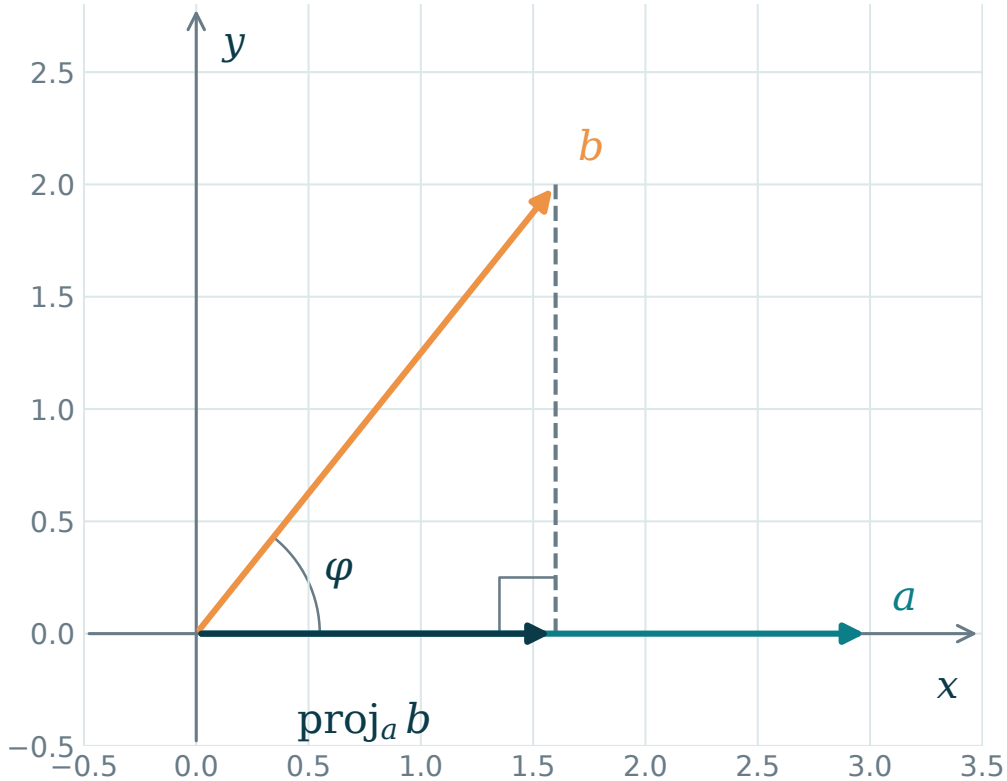
Получаем $\cos\varphi = 1/2$, то есть $\varphi = 60^\circ$.

Скалярная и векторная проекции

Пусть $a \neq 0$. Скалярная проекция b на направление a имеет знак.

$$\mathrm{pr}_a\, b = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

$$\mathrm{proj}_a\, b = \frac{a \cdot b}{|a|^2}\, a$$



Векторная проекция является вектором, коллинеарным a.

Пример ортогональной проекции

$$a = (2, 1), \qquad b = (1, 3), \qquad a \cdot b = 5, \quad |a|^2 = 5$$

$$\operatorname{proj}_a b = (2, 1)$$

$$b - \operatorname{proj}_a b = (-1, 2), \qquad (2, 1) \cdot (-1, 2) = 0$$

Разность исходного вектора и его проекции перпендикулярна направлению проекции.

Основные метрические неравенства

$$|a \cdot b| \leq |a|\,|b|$$

Неравенство Коши-Буняковского следует из определения произведения через косинус. Оно гарантирует допустимый диапазон формулы для угла.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Неравенство треугольника выражает геометрический факт: длина прямого перемещения не превосходит длины пути через промежуточную точку.

Типичные ошибки

Начало и базис	Координаты точки зависят от обоих. Координаты свободного вектора зависят от базиса.
Формула длины	Сумма квадратов координат даёт квадрат длины в ортонормированном базисе.
Отношение m:n	При внутреннем делении используют nA+mB, затем делят на m+n.
Проекция	Скалярную проекцию отличают от векторной. В знаменателях стоят разные степени длины.

Самостоятельная работа

1. Найдите декартовы координаты M при $O = (1, -1)$, $e_1 = (2, 0)$, $e_2 = (1, 1)$, если $M_{\text{афф}} = (1, 2)$.
2. Вычислите расстояние между $A = (0, -1, 2)$ и $B = (2, 2, 8)$.

3. Найдите M, если $A = (0, 0)$, $B = (6, 3)$ и $AM : MB = 1 : 2$ внутри отрезка.

4. При каком t векторы $(1, -2)$ и $(t, 3)$ перпендикулярны?

5. Найдите векторную проекцию $b = (3, 1)$ на $a = (1, 2)$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $M = (5, 1)$, поскольку $O + e_1 + 2e_2 = (5, 1)$.

2. $\rho(A, B) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$.

3. $M = (2A + B)/3 = (2, 1)$.

4. $t = 6$, так как $t - 6 = 0$.

5. $\text{proj}_a b = (1, 2)$.

Итоги и контрольные вопросы

1. Что нужно задать для аффинной системы координат?
2. Какие условия отличают декартов базис?
3. Почему формула разности координат верна в любом базисе?
4. Как получают формулы внутреннего и внешнего деления отрезка?
5. Как скалярное произведение определяет угол и перпендикулярность?
6. Чем отличаются скалярная и векторная проекции?

Литература

Основная литература по аналитической геометрии

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра и задачи

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.