Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 9

Ранг и линейные системы

Теорема Кронеккера-Капелли
Фундаментальная система решений

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 3. Векторная алгебра

Цель и план лекции

Цель: исследовать совместность через ранг и строить все решения однородной и неоднородной системы.

Ранг и совместность

Вычисление ранга методом Гаусса.
Базисные строки и столбцы.
Теорема Кронеккера-Капелли.

Пространство решений

Число свободных неизвестных.
Фундаментальная система решений.
Частное и общее решения.

Теория верна над R и C. В численных примерах используем вещественные неизвестные и параметры.

Ранг и базисный минор

Ранг матрицы равен наибольшему порядку ненулевого минора. Ненулевой минор, порядок которого равен рангу, называют базисным.

$$r = \operatorname{rank} A, \qquad 0 \le r \le \min(m, n)$$

Если ранг равен 0, матрица нулевая. В этом случае ненулевого базисного минора положительного порядка нет.

Инвариантность ранга

Перестановка строк, умножение строки на ненулевое число и прибавление кратной другой строки сохраняют ранг. Для столбцов справедливо то же.

Обоснование через миноры: каждый минор после преобразования выражается как линейная комбинация миноров того же порядка до преобразования.

Поэтому одновременное обращение всех миноров данного порядка в нуль сохраняется. Обратимость преобразования даёт равенство рангов.

Ранг ступенчатой матрицы

Пусть в ступенчатой матрице r ненулевых строк. Минор из этих строк и ведущих столбцов является треугольным и имеет ненулевую диагональ.

Все миноры более высокого порядка равны нулю, поскольку в них обязательно попадёт нулевая строка.

$$\operatorname{rank} A = \text{число ведущих элементов после исключения}$$

Это связывает определение по минорам с методом Гаусса.

Пример вычисления ранга методом Гаусса

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполняем $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, затем меняем местами вторую и третью строки. Получены два ведущих элемента.

$$\operatorname{rank} A = 2$$

Как выбрать базис исходных столбцов

В предыдущем примере ведущие элементы находятся в первом и втором столбцах. Базис столбцов берём из исходной матрицы A:

$$c_1 = (1, 2, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad c_2 = (2, 4, 1)^{\mathsf{T}}$$

$$c_3 = (3, 6, 1)^{\mathsf{T}} = c_1 + c_2$$

Преобразования строк меняют столбцы, но сохраняют их зависимости. Из исходной матрицы берём столбцы с найденными номерами.

Почему ранг строк равен рангу столбцов

Элементарные преобразования строк сохраняют их линейную оболочку. Ненулевые строки ступенчатой матрицы независимы, поэтому ранг строк равен r.

Преобразования строк также сохраняют зависимости столбцов. В ступенчатой матрице ведущие столбцы образуют базис её столбцов и их ровно r.

$$\text{Ранг строк} = \text{ранг столбцов} = \operatorname{rank} A$$

$$\operatorname{rank}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rank} A$$

Теорема о базисном миноре

Строки и столбцы, проходящие через базисный минор порядка r, образуют базисы соответствующих систем строк и столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Здесь можно взять строки 1 и 3 и столбцы 1 и 2. Они независимы благодаря ненулевому минору и их число равно рангу.

Полезные неравенства для ранга

$$\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$$

$$\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Размеры в формулах согласованы. Столбцы AB являются комбинациями столбцов A. Для второй оценки у произведения применяют транспонирование.

Столбцы A + B лежат в сумме оболочек столбцов A и B, что объясняет неравенство для суммы.

Теорема Кронеккера-Капелли

Пусть дана система $AX = b$, где A имеет m строк и n столбцов. Расширенную матрицу обозначим $[A \mid b]$.

$$AX = b \text{ совместна} \iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b]$$

Равенство рангов является необходимым и достаточным условием существования решения.

Доказательство теоремы о совместности

$$AX = b \quad \Longleftrightarrow \quad x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = b$$

Система совместна тогда и только тогда, когда b лежит в оболочке столбцов A. Добавление такого столбца не меняет ранг.

Если b не принадлежит оболочке, он добавляет один независимый вектор. Ранг расширенной матрицы увеличивается на 1.

Это доказывает обе стороны теоремы.

Число решений по значениям рангов

$\operatorname{rank}[A \mid b] > \operatorname{rank} A$	Решений нет.
$\operatorname{rank}[A \mid b] = \operatorname{rank} A = n$	Единственное решение.
$\operatorname{rank}[A \mid b] = \operatorname{rank} A = r < n$	Бесконечно много решений; свободных неизвестных $n - r$.

Число уравнений само по себе не определяет совместность и единственность.

Пример совместной системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Выполнены $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ и перестановка второй и третьей строк. Ранги основной и расширенной матриц равны 2.

Неизвестных 3, ведущих элементов 2. Следовательно, система совместна и имеет одно свободное неизвестное.

Общее решение совместной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \qquad x_3 = t, \qquad x_2 = 2 - t$$

$$x_1 = 3 - 2(2 - t) + t = -1 + 3t$$

$$X = (-1, 2, 0)^{\mathsf{T}} + t(3, -1, 1)^{\mathsf{T}}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Пример несовместной системы

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Матрица коэффициентов не изменилась и имеет ранг 2. Последняя строка расширенной матрицы даёт дополнительный ведущий элемент.

$$\operatorname{rank} A = 2, \quad \operatorname{rank}[A \mid b] = 3 \quad \Longrightarrow \quad \text{решений нет}$$

Пространство однородных решений

$$\ker A = \{X \in \mathbb{F}^n : AX = 0\}$$

Нуль принадлежит ker A. Если $Au = 0$ и $Av = 0$, то для любых скаляров:

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0$$

По критерию подпространства ker A является векторным подпространством $\mathbb{F}^n$. Его называют ядром матрицы A.

Размерность пространства однородных решений

Пусть у матрицы A имеется n столбцов и ранг r. После исключения n - r неизвестных остаются свободными.

$$\dim \ker A = n - \operatorname{rank} A = n - r$$

Каждый набор значений свободных неизвестных определяет ровно одно решение. Свободные значения можно выбирать независимо.

Число параметров совпадает с размерностью пространства решений.

Фундаментальная система решений

Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы $AX = 0$ является базисом пространства ker A.

$$X = c_1 u_1 + \cdots + c_{n-r} u_{n-r}$$

Векторы ФСР являются решениями, линейно независимы и порождают все однородные решения. Их число равно n - r.

ФСР может быть различной, но число её векторов для данной матрицы неизменно.

Алгоритм построения ФСР

1. Ступенчатый вид	Привести однородную систему к ступенчатому виду.
2. Свободные неизвестные	Выбрать их и выразить ведущие неизвестные через них.
3. Единичные наборы	По очереди задавать одной свободной неизвестной значение 1, а остальным 0.
4. Векторы решений	Восстановить все ведущие неизвестные для каждого такого набора.

Пример ФСР: четыре неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Третья строка равна сумме первых двух. После исключения остаются два независимых уравнения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Пример ФСР: свободные неизвестные

Выбираем $x_3 = s$, $x_4 = t$. Из второго уравнения:

$$x_2 = -s + 2t$$

Подставляем это выражение в первое уравнение:

$$x_1 = -2(-s + 2t) + s - t = 3s - 5t$$

Общий набор: $X = (3s - 5t, -s + 2t, s, t)^\mathsf{T}$.

Пример ФСР: два базисных решения

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Первый вектор получен при $(s, t) = (1, 0)$, второй при $(s, t) = (0, 1)$. Подстановка даёт $Au_1 = Au_2 = 0$.

$$X = su_1 + tu_2, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Проверка фундаментальной системы

Если $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$, третья координата даёт $\alpha = 0$, а четвёртая даёт $\beta = 0$. Поэтому векторы независимы.

Любое решение со свободными значениями s и t записано в виде $su_1 + tu_2$. Следовательно, эти два вектора порождают всё ядро.

$$\{u_1, u_2\} \text{ является базисом } \ker A, \qquad \dim \ker A = 4 - 2 = 2$$

Общее решение неоднородной системы

Пусть X_p является одним частным решением совместной системы $AX = b$. Если X является другим решением, то:

$$A(X - X_p) = b - b = 0$$

$$X = X_p + X_h, \qquad X_h \in \ker A$$

Обратно, сумма частного решения и любого однородного решения удовлетворяет исходной системе.

Пример неоднородной системы

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad X_p = (-3, 2, 0, 0)^{\mathsf{T}}$$

Для матрицы из примера ФСР частное решение проверяется непосредственно: первые две строки дают 1 и 2, третья даёт 3.

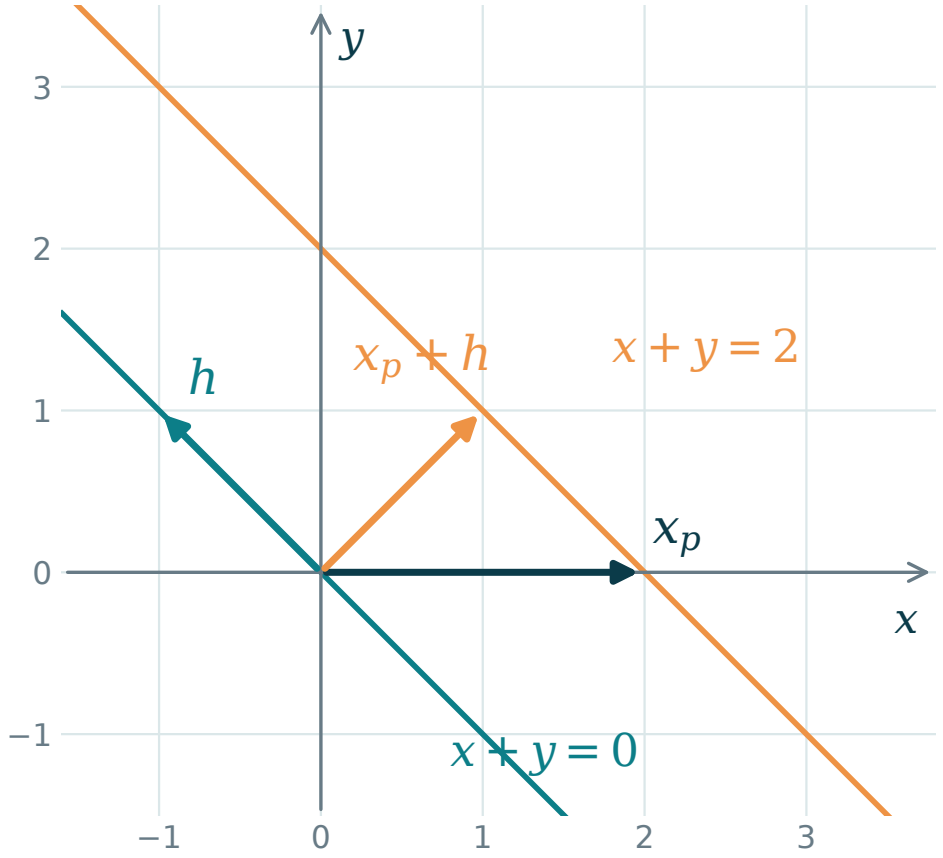
$$X = (-3, 2, 0, 0)^{\mathsf{T}} + su_1 + tu_2, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Геометрия множества неоднородных решений

Однородные решения образуют подпространство через начало координат.

Неоднородные решения получаются переносом этого подпространства на вектор частного решения.

На рисунке прямая x + y = 2 является переносом прямой x + y = 0.



Полный ранг и пустая ФСР

Если $\operatorname{rank} A = n$, свободных неизвестных нет и $\ker A = \{0\}$.

$$\dim \ker A = 0, \qquad \text{ФСР является пустой системой}$$

Нулевой вектор не включают в базис: система, содержащая его, зависима. Единственное однородное решение в этом случае равно нулю.

Если неоднородная система с той же матрицей совместна, её решение единственно.

Типичные ошибки

Разные ранги	Для совместности сравнивают ранг A с рангом всей расширенной матрицы.
Базис столбцов	Берут ведущие столбцы исходной матрицы, используя номера из ступенчатой формы.
Свободные значения	При построении ФСР используют по одному единичному набору на каждую свободную неизвестную.
Неоднородное решение	К линейной комбинации векторов ФСР нужно добавить частное решение.

Самостоятельная работа

1. Исследуйте совместность: $x + y = 1$, $2x + 2y = 3$. Укажите оба ранга.

2. Постройте ФСР: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Найдите общее решение: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$.

4. У матрицы размера 3×5 ранг равен 2. Какова размерность ядра и сколько векторов содержит ФСР?

Ответы к самостоятельной работе

1. $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank}[A \mid b] = 2$. Решений нет.

2. Можно взять $u_1 = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}$, $u_2 = (-1, 0, 1)^\mathsf{T}$.

3. $X = (2, 0, 0)^\mathsf{T} + su_1 + tu_2$, где $s, t \in \mathbb{R}$.

4. $\dim \ker A = 5 - 2 = 3$. ФСР содержит три вектора.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Почему элементарные преобразования сохраняют ранг?
2. Как связаны ведущие столбцы и базис исходных столбцов?
3. Каков геометрический смысл теоремы Кронеккера-Капелли?
4. Почему размерность ядра равна n - r?
5. Почему единичные наборы свободных значений дают ФСР?
6. Чем общее неоднородное решение отличается от однородного?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Название электронного курса содержит активную ссылку.