Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 15

Поверхности второго порядка

Эллипсоиды, гиперболоиды и конусы
Параболоиды и цилиндры

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 4. Аналитическая геометрия

Цель и план лекции

Цель: распознавать основные поверхности второго порядка и объяснять их форму через канонические уравнения и плоские сечения.

Основные поверхности

Эллипсоид и гиперболоиды.
Конус и параболоиды.
Цилиндры второго порядка.

Методы исследования

Сечения плоскостями.
Симметрия и расположение осей.
Перенос и выделение квадратов.

Используем действительное трёхмерное пространство и прямоугольные декартовы координаты.

Общее уравнение квадрики

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Хотя бы один квадратичный коэффициент ненулевой. Квадратичную часть удобно записать через действительную симметричную матрицу Q.

$$r^{\mathsf{T}}Qr + 2p^{\mathsf{T}}r + J = 0, \qquad Q = Q^{\mathsf{T}} \neq 0$$

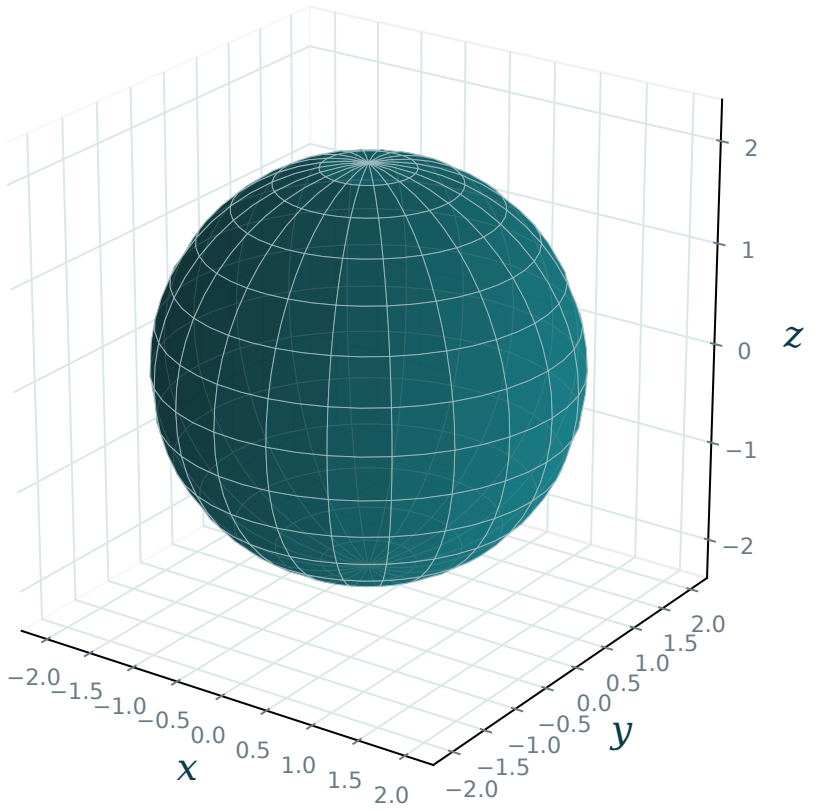
Исследование поверхности сечениями

Горизонтальные	Подстановка $z = h$ даёт кривую в плоскости, параллельной Oxy.
Вертикальные	Подстановки $x = h$ или $y = h$ выявляют профиль поверхности.
Симметрия	Чётная степень координаты без нечётных слагаемых показывает симметрию относительно соответствующей плоскости.
Область точек	По знакам и суммам квадратов определяют допустимые уровни и возможные вырождения.

Сфера

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=R^2$$

Центр $C=(h,k,l)$, радиус $R>0$. Сфера является поверхностью точек с постоянным расстоянием до центра.



На рисунке $x^2+y^2+z^2=4$. Все центральные сечения являются окружностями радиуса 2.

Каноническое уравнение эллипсоида

Эллипсоид имеет три положительные полуоси a, b, c и центр в начале координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0$$

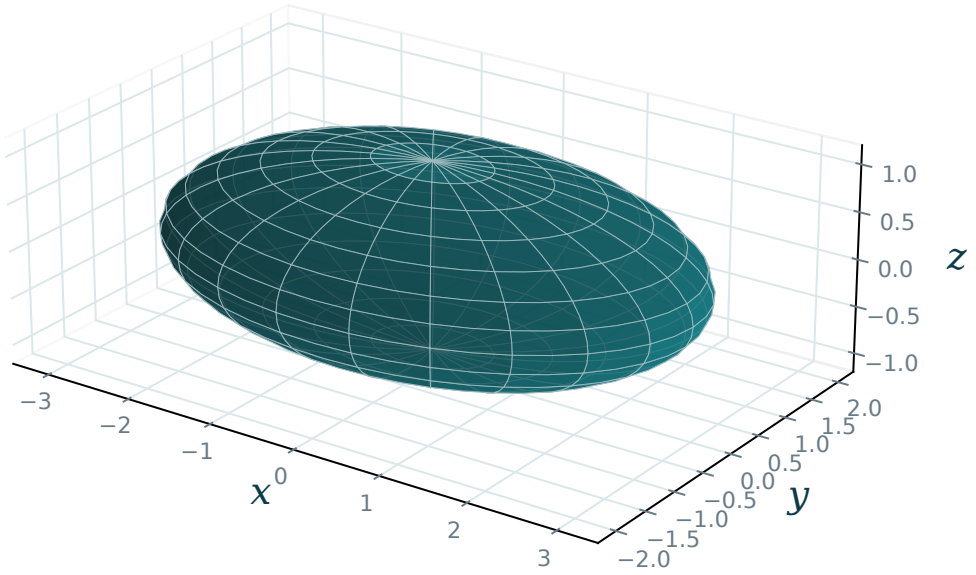
Поверхность пересекает оси в точках $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ и $(0, 0, \pm c)$.

Эллипсоид замкнут и ограничен. При a=b=c получается сфера.

Эллипсоид и длины полуосей

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

Полуоси равны 3, 2 и 1. Длины главных осей равны 6, 4 и 2.



Разные масштабы по осям объясняют вытянутую и сплюснутую форму.

Параллельные сечения эллипсоида

$$z = h \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

При $|h| < c$ получаем эллипс. Его полуоси равны $a\sqrt{1 - h^2/c^2}$ и $b\sqrt{1 - h^2/c^2}$.

При $|h| = c$ сечение состоит из одной точки. При $|h| > c$ действительных точек нет.

Сечения плоскостями x=const и y=const исследуют аналогично.

Эллипсоид с перенесённым центром

Перенос начала координат заменяет координаты разностями с координатами центра.

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}+(z-3)^2=1$$

Центр $C=(1,-2,3)$. Полуоси равны 3, 2 и 1. Главные оси параллельны координатным.

Сам перенос не изменяет размеры поверхности.

Однополостный гиперболоид

Два положительных квадрата и один отрицательный при правой части 1 задают однополостный гиперболоид.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

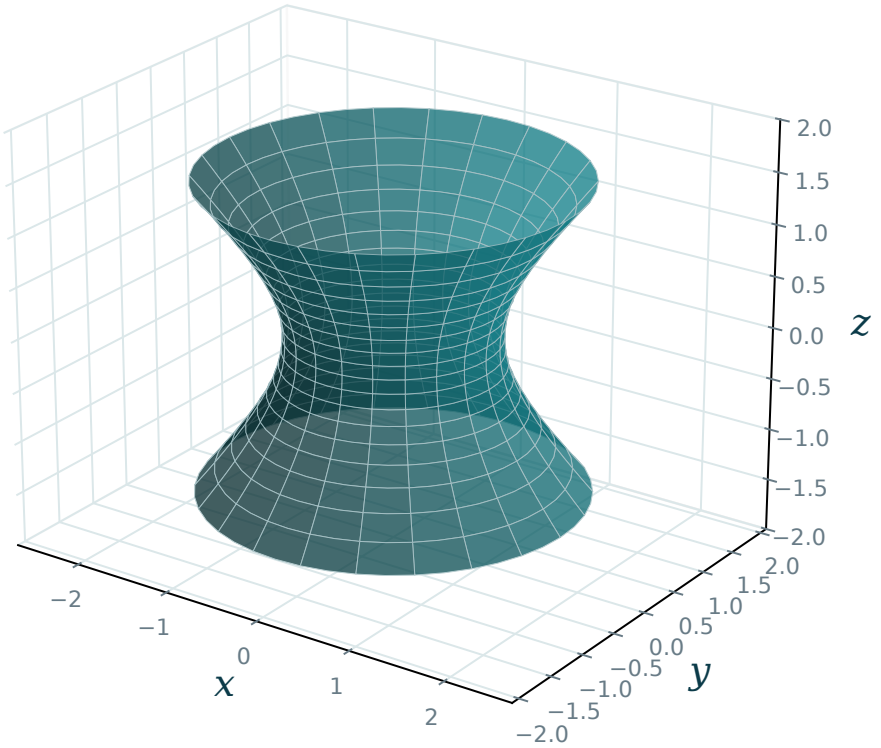
Поверхность связная. Ось соответствует переменной с отрицательным квадратом, здесь это Oz.

Параметры a, b, c положительны. Поверхность неограниченная.

Форма однополостного гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

При z=0 получается окружность радиуса 1. При увеличении |z| радиус горизонтальных сечений растёт.



На рисунке показана часть поверхности. Она продолжается в обоих направлениях оси Oz.

Сечения однополостного гиперболоида

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

Для любого h получаем эллипс. Самое узкое горизонтальное сечение находится в плоскости z=0.

$$x = 0: \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Вертикальные координатные сечения являются гиперболами.

Двуполостный гиперболоид

Один положительный квадрат и два отрицательных при правой части 1 задают двуполостный гиперболоид.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Поверхность имеет две отдельные полости. Из уравнения следует $|z| \geq c$. Вершины: $(0, 0, \pm c)$.

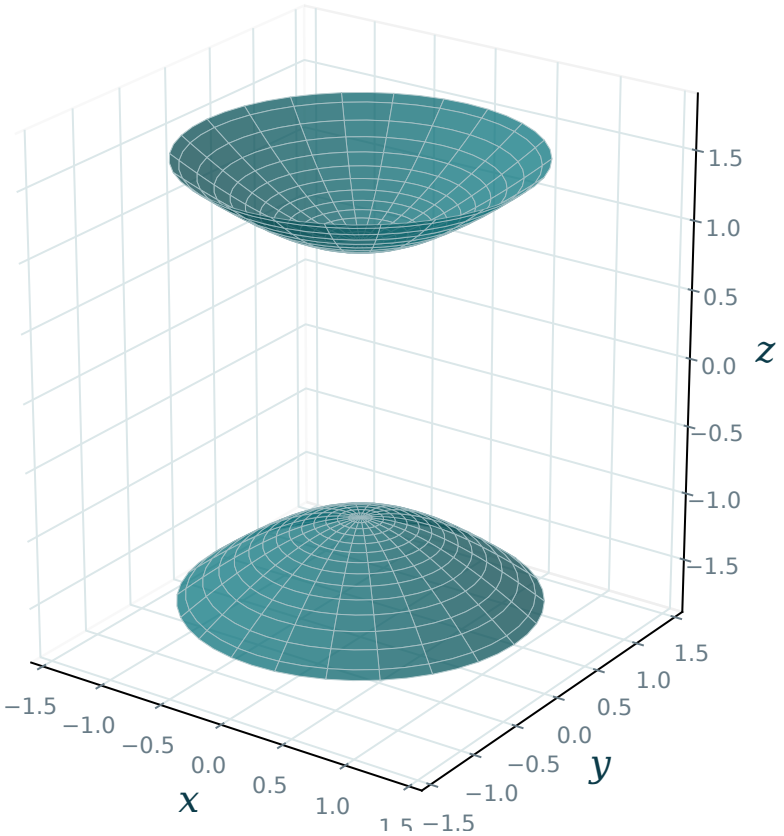
Ось соответствует переменной с положительным квадратом, здесь это Oz.

Две полости гиперболоида

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

При $-1 < z < 1$ точек поверхности нет.
Две полости начинаются в вершинах (0,0,1) и (0,0,-1).

Каждая полость расширяется при удалении от соответствующей вершины.



Сечения двуполостного гиперболоида

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

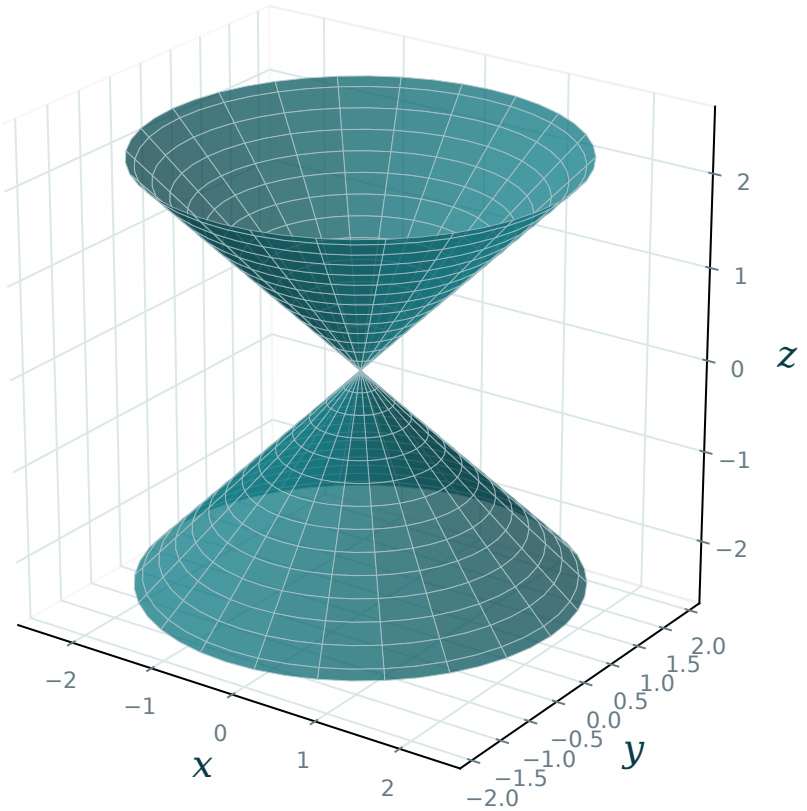
При $|h| > c$ получаем эллипсы. При $|h| = c$ остаются вершины. При $|h| < c$ сечение пусто.

Сечения плоскостями, содержащими ось Oz, являются гиперболами с ветвями, направленными вверх и вниз.

Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Вершина находится в начале координат. Конус имеет две части, соединяющиеся в вершине.



На рисунке $x^2 + y^2 = z^2$. Каждая прямая через вершину и точку поверхности целиком лежит на конусе.

Сечения и образующие конуса

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

При ненулевом h получается эллипс, при h=0 одна точка. Плоскость через ось Oz пересекает конус по двум образующим.

$$F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$$

Однородность уравнения объясняет прямолинейные образующие через вершину.

Эллиптический параболоид

Квадраты с одинаковыми положительными знаками выражают одну координату линейно.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad a, b > 0$$

Вершина в начале координат, ось направлена вдоль Oz. Горизонтальные сечения при z>0 являются эллипсами.

При смене знака перед правой частью параболоид раскрывается вниз.

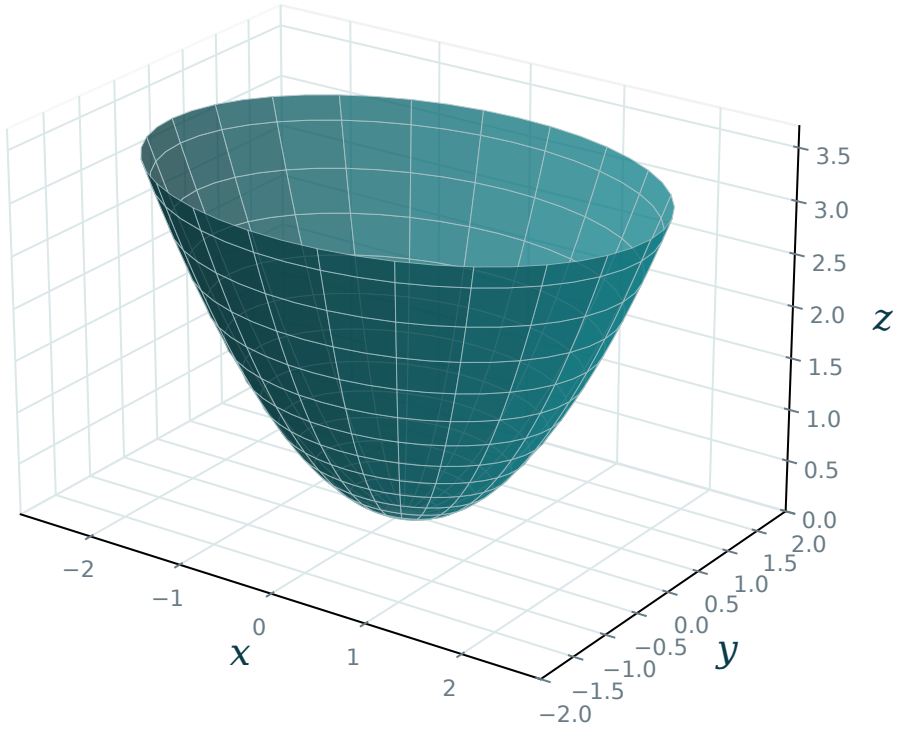
Сечения эллиптического параболоида

$$z = \frac{x^2}{2} + y^2$$

При $z = h > 0$ имеем эллипс.

При $z = 0$ остаётся вершина.

При $z < 0$ сечение пусто.

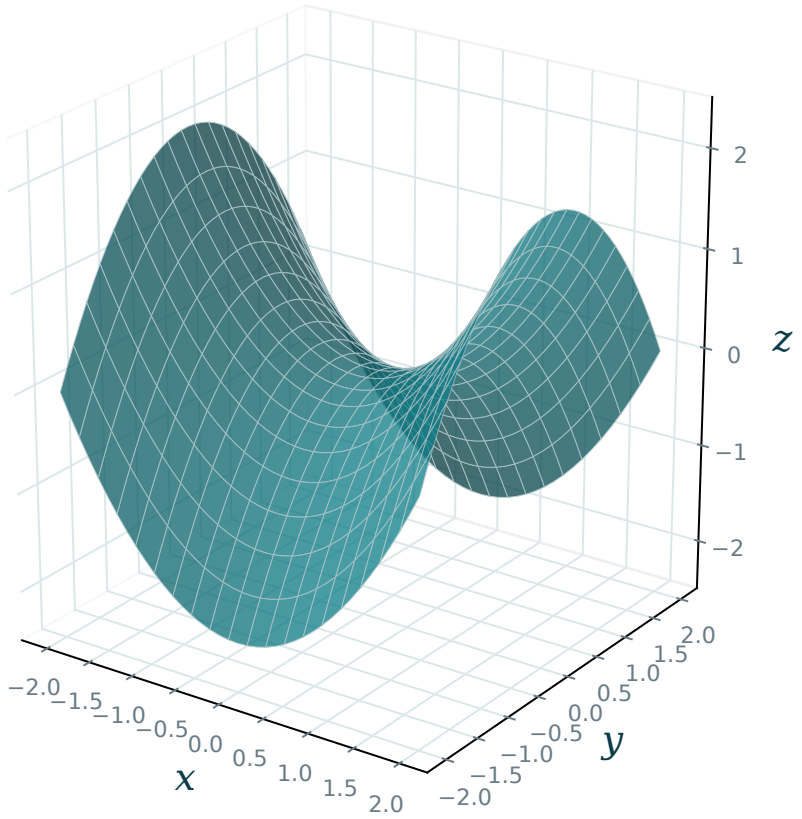


Вертикальные плоскости через ось дают параболы.

Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Квадраты имеют разные знаки. Поверхность имеет седловую форму и проходит через начало координат.



На рисунке $z = (x^2 - y^2)/2$. Значения z бывают положительными и отрицательными.

Седловая форма через плоские сечения

$$y = 0: \ z = \frac{x^2}{a^2}, \qquad x = 0: \ z = -\frac{y^2}{b^2}$$

Две вертикальные параболы направлены в противоположные стороны. Поэтому начало не является ни наибольшей, ни наименьшей по высоте точкой.

$$z = 0: \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

Ненулевые горизонтальные сечения являются гиперболами.

Цилиндрическая поверхность

Если уравнение не содержит z, то вместе с любой своей точкой поверхность содержит всю прямую, параллельную Oz.

$$F(x, y) = 0, \qquad z \in \mathbb{R}$$

Кривая F(x,y)=0 в плоскости Oxy является направляющей. Параллельные прямые вдоль Oz называют образующими.

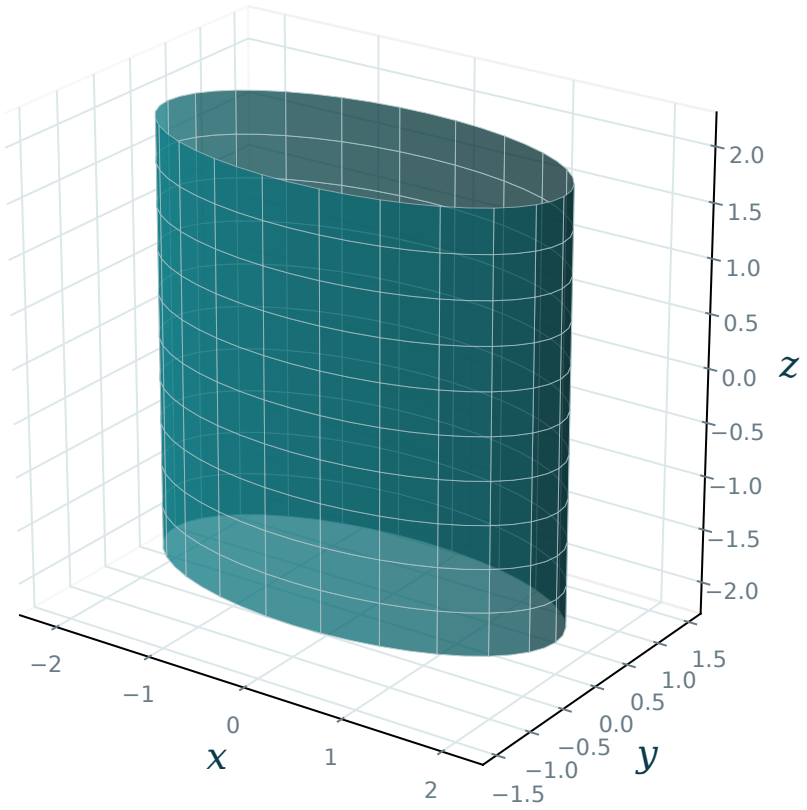
В названии «цилиндр» не обязательно подразумевается круглая поверхность.

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Любое горизонтальное сечение является одним и тем же эллипсом. Координата z принимает все действительные значения.

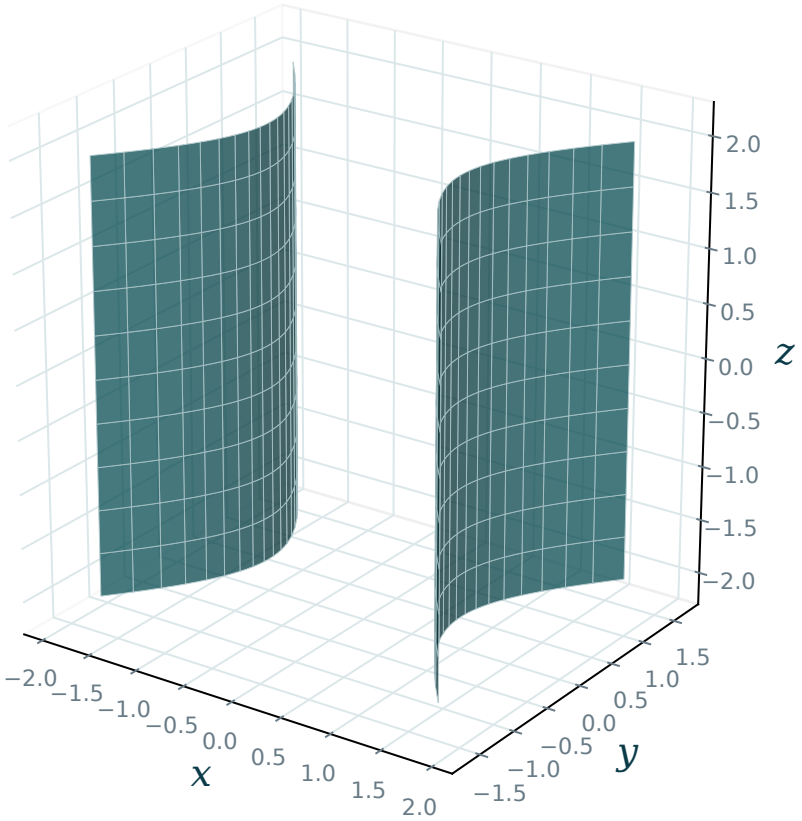
На рисунке $x^2/4 + y^2 = 1$. Крышек и граничных окружностей у этой поверхности нет.



Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Направляющая является гиперболой. Каждая её точка порождает прямую, параллельную Oz.

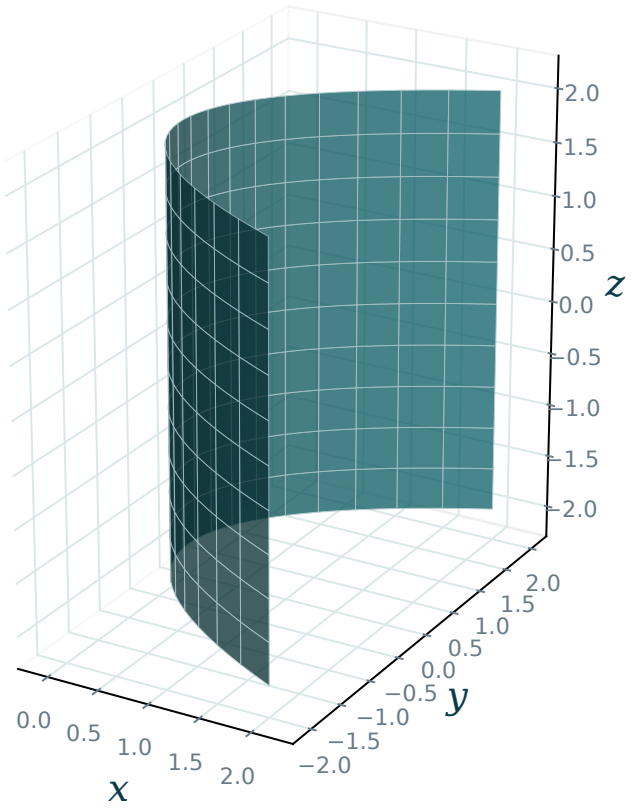


На рисунке $x^2 - y^2 = 1$. Две ветви направляющей образуют две отдельные части поверхности.

Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px, \qquad p \neq 0$$

Направляющая является параболой, а координата z свободна. В плоскости z=h получаем ту же параболу.



На рисунке $y^2 = 2x$. У поверхности нет единственной вершины: точки (0,0,z) образуют целую прямую.

Ось цилиндра и перенос координат

$$\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z+2)^2}{9}=1$$

В уравнении отсутствует x. Поэтому образующие параллельны Ox. Центры эллиптических сечений лежат на прямой y=1, z=-2.

Название отсутствующей координаты определяет направление образующих в данной системе. Перенос меняет положение, но сохраняет форму.

Гиперболоиды и конус: роль правой части

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Однополостный гиперболоид. Горизонтальное сечение есть при любом z.

$x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Двуполостный гиперболоид. После умножения на -1 получаем $z^2 - x^2 - y^2 = 1$.

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Конус. Между двумя типами гиперболоидов находится однородное уравнение с вершиной.

Вырожденные поверхности

$x^2 + y^2 = 0$

Прямая Oz: x=y=0, а z произволен.

$x^2 = 1$

Две параллельные плоскости x=1 и x=-1.

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Единственная точка (0,0,0).

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$

Пустое множество действительных точек.

Устранение смешанных слагаемых

Теорема о действительной симметричной матрице: существует ортонормированный базис собственных векторов Q. В нём квадратичная часть диагональна.

$$Qe_i = \lambda_i e_i, \qquad r^{\mathsf{T}} Q r = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2$$

После поворота выделяют полные квадраты по переменным с ненулевыми коэффициентами. Линейное слагаемое по оставшейся переменной может приводить к параболоиду.

Знаки, нулевые коэффициенты и свободный член определяют итоговый тип.

Пример приведения к канонической форме

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 6z - 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - (z-3)^2 = 1$$

Получаем однополостный гиперболоид с центром (1,-2,3) и осью, параллельной Oz.

При выделении квадрата в отрицательном слагаемом нужно сохранять общий знак минус.

Типичные ошибки

Одна или две полости	При правой части 1 два положительных квадрата дают одну полость, один положительный квадрат даёт две.
Конус	Его каноническое центральное уравнение имеет нулевую правую часть.
Цилиндр	Отсутствующая переменная задаёт направление образующих.
Картинка и сечение	Плоское сечение может выродиться в точку, прямые или пустое множество.

Самостоятельная работа

1. Определите поверхность $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$ и её полуоси.

2. Определите поверхность $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ и направление её оси.

3. Какую поверхность задаёт $z = x^2 + y^2$?

4. Какую поверхность задаёт $y^2 = 4x$ в трёхмерном пространстве?

5. Найдите сечение поверхности из задания 1 плоскостью z=2.

Ответы к самостоятельной работе

1. Эллипсоид с полуосями 2, 3 и 4.

2. Двуполостный гиперболоид с осью Oz и вершинами (0,0,± 1).

3. Эллиптический параболоид вращения с осью Oz.

4. Параболический цилиндр с образующими, параллельными Oz.

5. $x^2/4 + y^2/9 = 3/4$ в плоскости z=2. Это эллипс.

Итоги и контрольные вопросы

1. Как сечения помогают распознать поверхность?
2. Как отличают однополостный и двуполостный гиперболоиды?
3. Почему конус имеет прямолинейные образующие через вершину?
4. Чем различаются эллиптический и гиперболический параболоиды?
5. Как по уравнению определяют направление образующих цилиндра?
6. Какие вырожденные множества могут задаваться квадратичным уравнением?

Литература

Основная литература по аналитической геометрии

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра и задачи

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.