Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 13

Прямые на плоскости и в пространстве

Уравнения и взаимное расположение
Углы и расстояния

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 4. Аналитическая геометрия

Цель и план лекции

Цель: выбирать удобное уравнение прямой, исследовать расположение прямых и решать задачи на углы и расстояния.

Прямая на плоскости

Общее и параметрическое уравнения.
Пересечение и параллельность.
Угол и расстояние до прямой.

Прямая в пространстве

Направляющий вектор.
Пересечение и скрещивание.
Связь прямой с плоскостью.

Во всех метрических формулах используем прямоугольную декартову систему.

Общее уравнение прямой на плоскости

Линейное уравнение двух переменных задаёт прямую, если хотя бы один коэффициент при переменных ненулевой.

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 > 0$$

Вектор $n = (A, B)$ перпендикулярен прямой. Его называют нормальным вектором.

Умножение всех коэффициентов на одно ненулевое число задаёт ту же прямую.

Прямая через точку с заданной нормалью

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ лежит на прямой, а $n = (A, B) \neq 0$ перпендикулярен ей.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на прямой и ортогонален n. Поэтому $n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Свободный коэффициент общего уравнения равен $C = -Ax_0 - By_0$.

Параметрические уравнения прямой

Точка $M_0 = (x_0, y_0)$ и ненулевой направляющий вектор $s = (p, q)$ однозначно задают прямую.

$$r = r_0 + ts, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$x = x_0 + pt, \qquad y = y_0 + qt$$

Для общего уравнения можно взять $s = (-B, A)$, поскольку $(A, B) \cdot (-B, A) = 0$.

Переход между формами уравнения

$$M_0 = (1, 2), \qquad s = (2, -1)$$

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 2 - t$$

Из второго равенства $t = 2 - y$. Подставляем в первое: $x = 1 + 2(2 - y)$.

$$x + 2y - 5 = 0$$

Каноническое уравнение на плоскости

Если обе координаты направляющего вектора ненулевые, исключение параметра даёт:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \qquad pq \neq 0$$

При $p = 0$ прямая имеет уравнение $x = x_0$. При $q = 0$ получаем $y = y_0$.

При нулевых координатах направления удобно сохранять параметрические уравнения.

Прямая через две различные точки

Пусть $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ различны. Направляющий вектор равен $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

Для $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (5, 0)$ получаем $-2(x - 1) - 4(y - 2) = 0$.

После упрощения: $x + 2y - 5 = 0$. Формула работает и для вертикальной прямой.

Угловой коэффициент

При $B \neq 0$ общее уравнение можно разрешить относительно y.

$$y = kx + b, \qquad k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$$

Коэффициент $k = \tan\alpha$ задаёт наклон к оси Ox, если угол определён по модулю π.

Вертикальная прямая имеет вид x=const и конечного углового коэффициента не имеет.

Уравнение прямой в отрезках

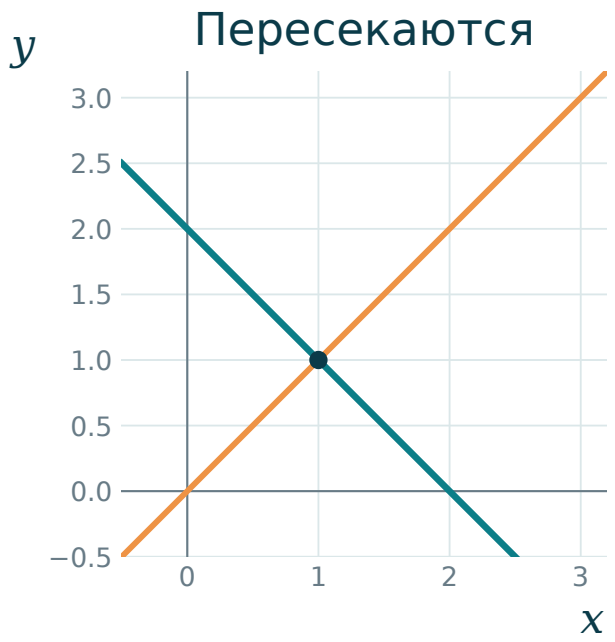
Пусть прямая пересекает оси в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$, где $a, b \neq 0$.

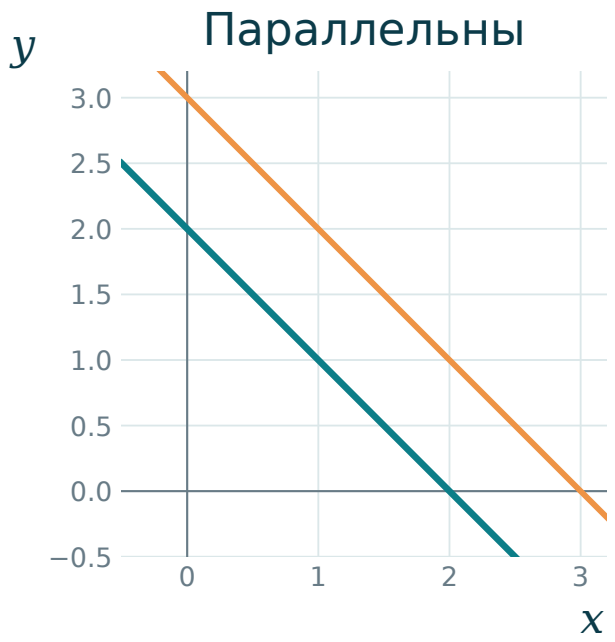
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

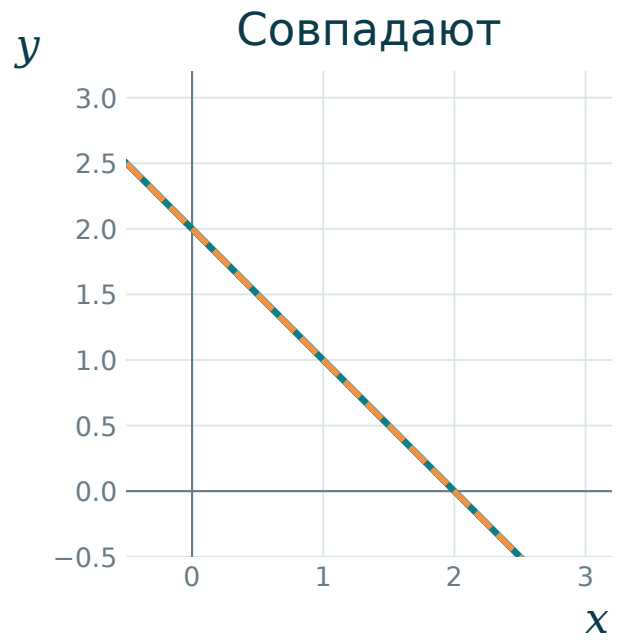
Например, $x/4 + y/2 = 1$ проходит через (4,0) и (0,2).

Для прямой через начало координат или параллельной координатной оси эта форма с конечными ненулевыми a и b не подходит.

Взаимное расположение прямых на плоскости







Две прямые на плоскости имеют одну общую точку, не имеют общих точек или совпадают.

Алгебраические признаки расположения

Пересечение

$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Система двух уравнений имеет единственное решение.

Параллельность

Нормали пропорциональны: $(A_2, B_2) = \lambda(A_1, B_1)$, но $C_2 \neq \lambda C_1$.

Совпадение

При том же $\lambda \neq 0$ выполнено также $C_2 = \lambda C_1$. Все коэффициенты пропорциональны.

Пример пересечения двух прямых

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $y = 2x$. Тогда $x + 4x = 5$, откуда $x = 1$ и $y = 2$.

$$M = (1, 2)$$

Определитель системы равен $-1 - 4 = -5 \neq 0$.

Параллельные и совпадающие прямые

$$2x - y + 1 = 0, \qquad 4x - 2y + 3 = 0$$

Коэффициенты при переменных удвоены, а свободный коэффициент не удвоен. Прямые параллельны и различны.

$$2x - y + 1 = 0, \qquad 4x - 2y + 2 = 0$$

Во второй паре все коэффициенты удвоены. Уравнения задают одну и ту же прямую.

Меньший угол между прямыми

Угол $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ между прямыми находят по их нормалям или направляющим векторам.

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Модуль учитывает, что направление нормали можно заменить противоположным без изменения прямой.

У параллельных прямых меньший угол равен нулю.

Перпендикулярность двух прямых

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормальные векторы.

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Для прямых $x + 2y - 5 = 0$ и $2x - y = 0$ получаем $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$.

Если обе прямые имеют конечные угловые коэффициенты, критерий принимает вид $k_1k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Для точки $P = (x_P, y_P)$ и прямой $Ax + By + C = 0$, где $A^2 + B^2 > 0$, имеем:

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

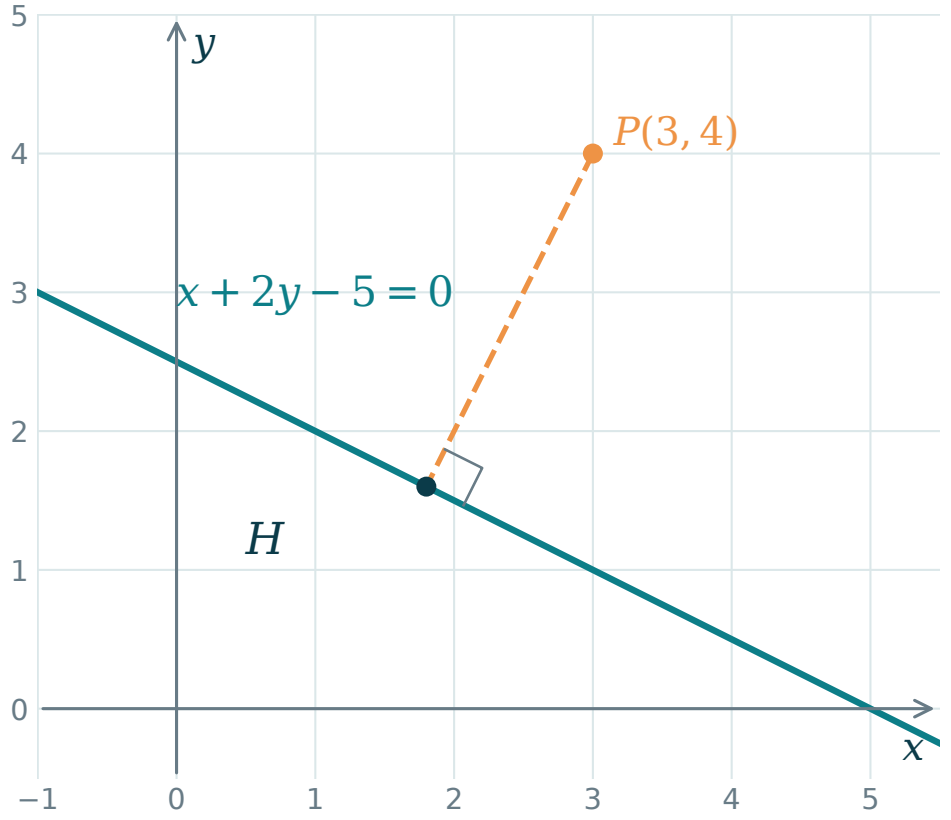
Числитель измеряет отклонение по нормальному направлению с учётом масштаба коэффициентов.

Умножение уравнения прямой на ненулевой множитель не меняет полученное расстояние.

Пример расстояния до прямой

Пусть $P = (3, 4)$, а прямая задана уравнением $x + 2y - 5 = 0$.

$$\rho = \frac{|3 + 8 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$



Основание перпендикуляра: $H = (9/5, 8/5)$. Точка H удовлетворяет уравнению прямой.

Ортогональная проекция точки на прямую

Пусть $n = (A, B)$ и P не обязательно лежит на прямой. Точку H ищем на нормали через P.

$$H = P - \frac{Ax_P + By_P + C}{A^2 + B^2}(A, B)$$

Подстановка координат H в уравнение даёт нуль, а $\overrightarrow{PH}$ коллинеарен n.

Проекция H и расстояние |PH| дают взаимную проверку вычислений.

Прямая в трёхмерном пространстве

Точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и направление $s = (p, q, r) \neq 0$ задают прямую.

$$M = M_0 + ts, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$x = x_0 + pt, \qquad y = y_0 + qt, \qquad z = z_0 + rt$$

Одно линейное уравнение трёх переменных с ненулевой нормалью задаёт плоскость. Для прямой нужны дополнительные условия.

Каноническая форма в пространстве

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \qquad (pqr \neq 0)$$

Если координата направляющего вектора нулевая, соответствующая координата точки на прямой постоянна.

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 3$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1}, \qquad z = 3$$

Прямая через две точки пространства

Для различных A и B направляющий вектор равен $s = \overrightarrow{AB}$.

$$M = A + t(B - A), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Если $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 1, 1)$, то $s = (2, 1, -1)$ и $M = (1, 0, 2) + t(2, 1, -1)$.

Параметры t=0 и t=1 возвращают исходные точки.

Уравнение плоскости

Плоскость через $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ с ненулевой нормалью $n = (A, B, C)$ задают условием ортогональности.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

После раскрытия скобок: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Эта формула позволяет задавать прямую как пересечение двух плоскостей.

Плоскость через три точки

Три неколлинеарные точки A, B, C задают плоскость. Её нормаль можно найти как $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

$$(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$x + y + z = 1$$

Прямая как пересечение плоскостей

Если нормали n_1 и n_2 неколлинеарны, две плоскости пересекаются по прямой с направлением $s = n_1 \times n_2$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

$$x = t, \qquad y = t, \qquad z = 1 - 2t$$

Направление (1,1,-2) перпендикулярно обеим нормалям (1,1,1) и (1,-1,0).

Взаимное расположение прямых в пространстве

Параллельные

Направления коллинеарны. При $M_2 - M_1$ в том же направлении прямые совпадают, иначе различны.

Пересекающиеся

Направления неколлинеарны и $[M_2 - M_1, s_1, s_2] = 0$. Прямые лежат в одной плоскости.

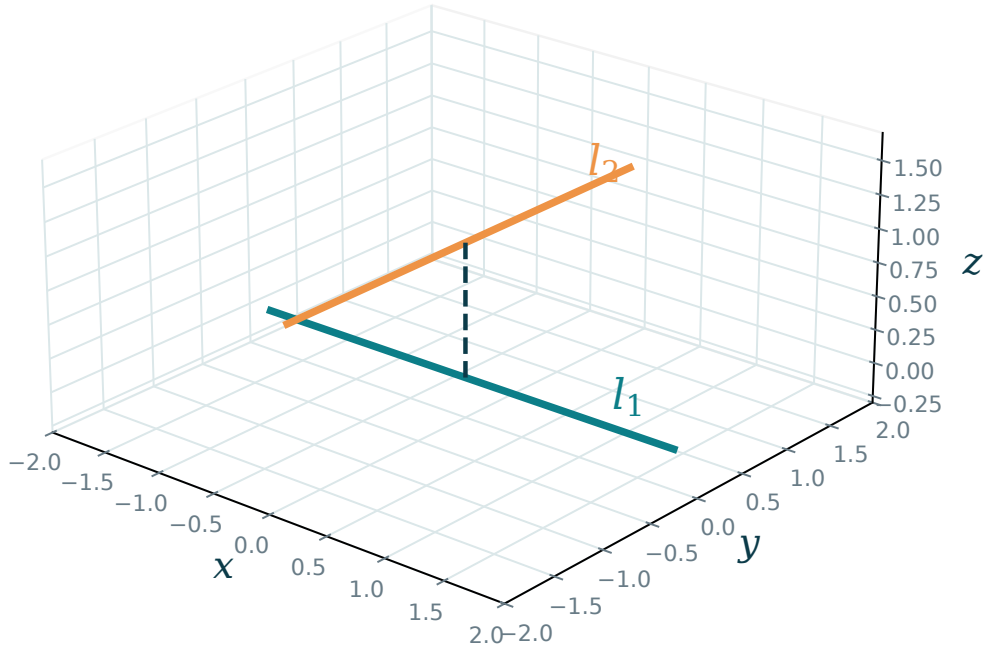
Скрещивающиеся

Направления неколлинеарны и $[M_2 - M_1, s_1, s_2] \neq 0$. Общей плоскости и общей точки нет.

Пример скрещивающихся прямых

$$l_1 : \ M = (t, 0, 0)$$

$$l_2 : \ M = (0, s, 1)$$



Направления (1,0,0) и (0,1,0) неколлинеарны. На первой прямой z=0, на второй z=1.

Общих точек нет. Прямые скрещиваются.

Пересечение параметрических прямых

$$l_1 : \ (t, t, 0), \qquad l_2 : \ (2 - s, s, 0)$$

Приравниваем все три координаты. Параметры двух прямых обозначаем разными буквами.

$$t = 2 - s, \qquad t = s \quad \Longrightarrow \quad t = s = 1$$

$$M = (1, 1, 0)$$

Угол между прямыми в пространстве

Для ненулевых направлений s_1 и s_2 меньший угол определяется скалярным произведением.

$$\cos\varphi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1|\,|s_2|}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Формула применима и к скрещивающимся прямым: их направления параллельно переносят к общему началу.

Нулевое произведение означает перпендикулярность направлений и само по себе не доказывает пересечение.

Прямая и плоскость

$n \cdot s \neq 0$	Единственная общая точка. Её находят подстановкой параметрических координат в уравнение плоскости.
$n \cdot s = 0$	Если начальная точка прямой лежит в плоскости, вся прямая лежит в этой плоскости.
Параллельность	При $n \cdot s = 0$ и начальной точке вне плоскости общих точек нет.

Пересечение прямой с плоскостью

Пусть прямая имеет вид $M = t(1, 1, 1)$, а плоскость задана уравнением $x + y + z = 3$.

$$t + t + t = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = 1$$

Общая точка равна $M = (1, 1, 1)$. Нормаль $n = (1, 1, 1)$ имеет ненулевое произведение с направлением прямой.

Подстановка параметров сводит задачу к одному линейному уравнению.

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть прямая проходит через M_0 с направлением $s \neq 0$. Площадь параллелограмма на $\overrightarrow{M_0P}$ и s равна $|s|\rho$.

$$\rho(P, l) = \frac{|(P - M_0) \times s|}{|s|}$$

Для оси Ox и точки $P = (0, 3, 4)$ получаем $\rho = 5$.

Формула даёт нуль ровно для точек, принадлежащих прямой.

Расстояние между прямыми в пространстве

Если направления неколлинеарны, вектор $s_1 \times s_2$ перпендикулярен обеим прямым.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(M_2 - M_1) \cdot (s_1 \times s_2)|}{|s_1 \times s_2|}$$

Для пересекающихся прямых числитель равен нулю. Для скрещивающихся формула даёт длину общего перпендикуляра.

Для параллельных прямых используют $\rho = |(M_2 - M_1) \times s_1| / |s_1|$.

Типичные ошибки

Направление и нормаль	На плоскости они перпендикулярны. В пространстве у прямой есть целая плоскость нормальных направлений.
Нулевой знаменатель	При нулевой координате направления сохраняют соответствующее уравнение координаты как константы.
Пространство	Непараллельные прямые в пространстве могут скрещиваться.
Углы	Нулевое скалярное произведение направлений не гарантирует общей точки прямых.

Самостоятельная работа

1. Составьте уравнение прямой через A(0,1) и B(2,0).
2. Найдите пересечение прямых $x + y = 3$ и $x - y = 1$.
3. Найдите расстояние от O(0,0) до $3x + 4y - 10 = 0$.
4. Задайте прямую через (1,0,2) с направлением (2,1,-1).
5. Исследуйте расположение прямых $(t, 0, 0)$ и $(0, s, 1)$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $x + 2y - 2 = 0$.

2. Точка пересечения (2,1).

3. $\rho = 10/5 = 2$.

4. $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 - t$, где $t \in \mathbb{R}$.

5. Прямые скрещиваются. Расстояние между ними равно 1.

Итоги и контрольные вопросы

1. Как связаны нормаль, направление и общее уравнение прямой?
2. Почему для вертикальной прямой неудобна форма $y=kx+b$?
3. Как различают пересечение, параллельность и совпадение?
4. Как получают формулу расстояния от точки до прямой?
5. Как проверяют компланарность двух пространственных прямых?
6. Как задают прямую как пересечение двух плоскостей?

Литература

Основная литература по аналитической геометрии

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра и задачи

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.