Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 8

Линейная зависимость и базис

Независимость системы векторов
Размерность и ранг матрицы

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 3. Векторная алгебра

Цель и план лекции

Цель: исследовать линейную зависимость, выбирать базис и определять размерность и ранг.

Системы векторов

Тривиальная и нетривиальная комбинации.
Зависимость и независимость.
Избыточные векторы.

Базис и ранг

Порождающая система и базис.
Координаты и размерность.
Ранг системы векторов и ранг матрицы.

Результат: проверять независимость и объяснять, почему в базисе представление вектора единственно.

Линейная зависимость системы векторов

Система $v_1, \dots, v_k$ линейно зависима, если существуют скаляры, не все равные нулю, такие, что:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

Такую комбинацию называют нетривиальной. Если равенство возможно только при всех нулевых коэффициентах, система линейно независима.

Слова «не все коэффициенты равны нулю» являются существенной частью определения.

Примеры зависимости и независимости

Зависимая система

$u = (1, 2)$, $v = (2, 4)$.
Выполнено $2u - v = 0$, коэффициенты 2 и -1 не равны нулю одновременно.

Независимая система

$e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
Из $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$ получаем $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

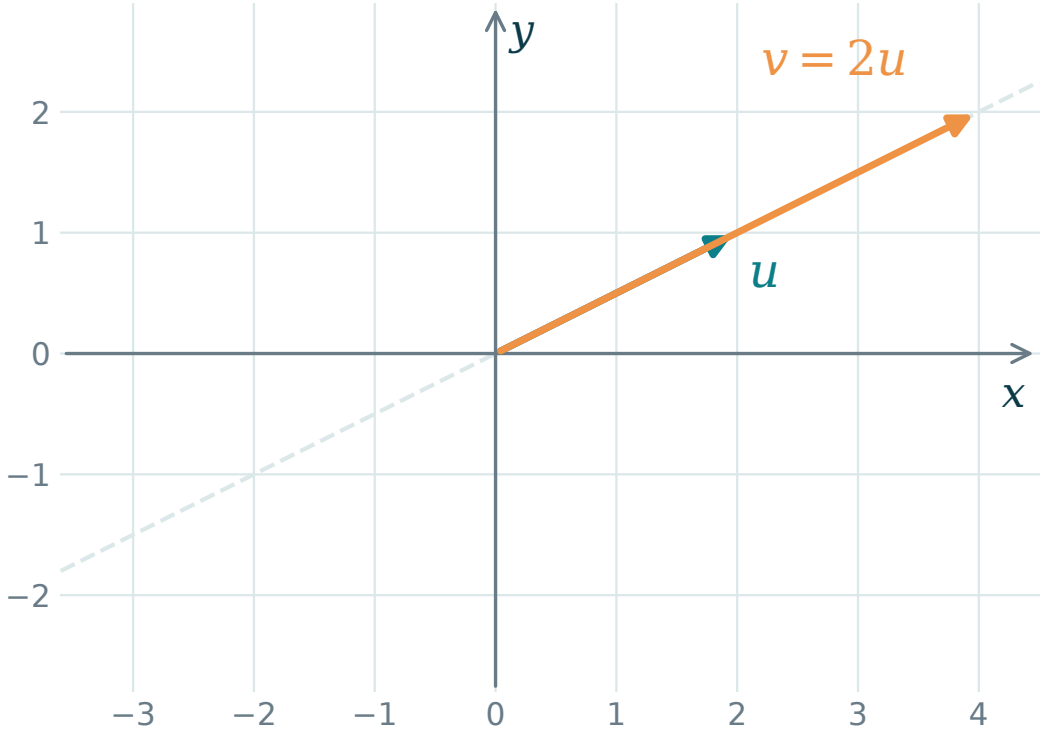
Для доказательства зависимости достаточно одной нетривиальной связи. Для независимости необходимо показать отсутствие всех таких связей.

Два пропорциональных вектора

Если $u \neq 0$ и $v = \lambda u$, то система u, v зависима:

$$\lambda u - v = 0$$

На рисунке оба вектора лежат на одной прямой через начало координат. Один не добавляет нового направления.



Критерий выражения через остальные векторы

Теорема: конечная непустая система зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один её вектор является комбинацией остальных.

Если в нетривиальной связи $\alpha_j \neq 0$, то:

$$v_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i$$

Обратно, перенося все слагаемые представления в одну сторону, получаем нетривиальную связь с коэффициентом 1 при выбранном векторе.

Простые свойства зависимости

Нулевой вектор	Любая система, содержащая нулевой вектор, зависима.
Повторение	Два одинаковых вектора дают связь с коэффициентами 1 и -1.
Расширение	Если подсистема зависима, вся система также зависима.
Подсистема	Любая подсистема независимой системы независима.

Зависимость определяется полем скаляров

Числа 1 и i рассматриваем как векторы множества $\mathbb{C}$. Над полем $\mathbb{R}$ они независимы:

$$\alpha + \beta i = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Над полем $\mathbb{C}$ эта же пара зависима, поскольку допустимы комплексные коэффициенты:

$$i \cdot 1 - 1 \cdot i = 0$$

Проверка независимости

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

Составим условие $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. Коэффициенты комбинации являются неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Из первых двух равенств $\alpha = \beta = -\gamma$. Третье даёт $-2\gamma = 0$. Все коэффициенты равны нулю.

Следовательно, три вектора линейно независимы.

Квадратная матрица и определитель

Пусть n векторов из $\mathbb{F}^n$ записаны столбцами квадратной матрицы A. Условие зависимости имеет вид $A\alpha = 0$.

$$v_1, \dots, v_n \text{ независимы} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

Это следует из критерия единственности решения однородной квадратной системы.

Для прямоугольной матрицы этот способ с одним полным определителем неприменим.

Число векторов и число координат

Если $k > n$, любая система из k векторов пространства $\mathbb{F}^n$ зависима.

Действительно, уравнение нулевой линейной комбинации даёт n однородных уравнений относительно k коэффициентов.

Неизвестных больше, чем уравнений. После исключения остаётся свободное неизвестное, поэтому существует ненулевой набор коэффициентов.

В частности, любые три вектора плоскости $\mathbb{R}^2$ зависимы.

Порождающая система и базис

Система $b_1, \dots, b_n$ порождает V, если каждый вектор V является её линейной комбинацией.

$$\text{span}(b_1, \dots, b_n) = V$$

Базис пространства: линейно независимая порождающая система.

Порождение гарантирует существование представления, а независимость гарантирует его единственность.

Почему представление по базису единственно

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$$

Вычтем одно представление из другого:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) b_j = 0$$

Независимость базиса даёт $\alpha_j - \beta_j = 0$ для каждого j. Следовательно, все коэффициенты совпадают.

Стандартный базис числового пространства

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Все наборы представимы в этой системе. Нулевая комбинация требует нулевого коэффициента при каждом векторе, поэтому система независима.

Координаты в стандартном базисе совпадают с компонентами числового набора.

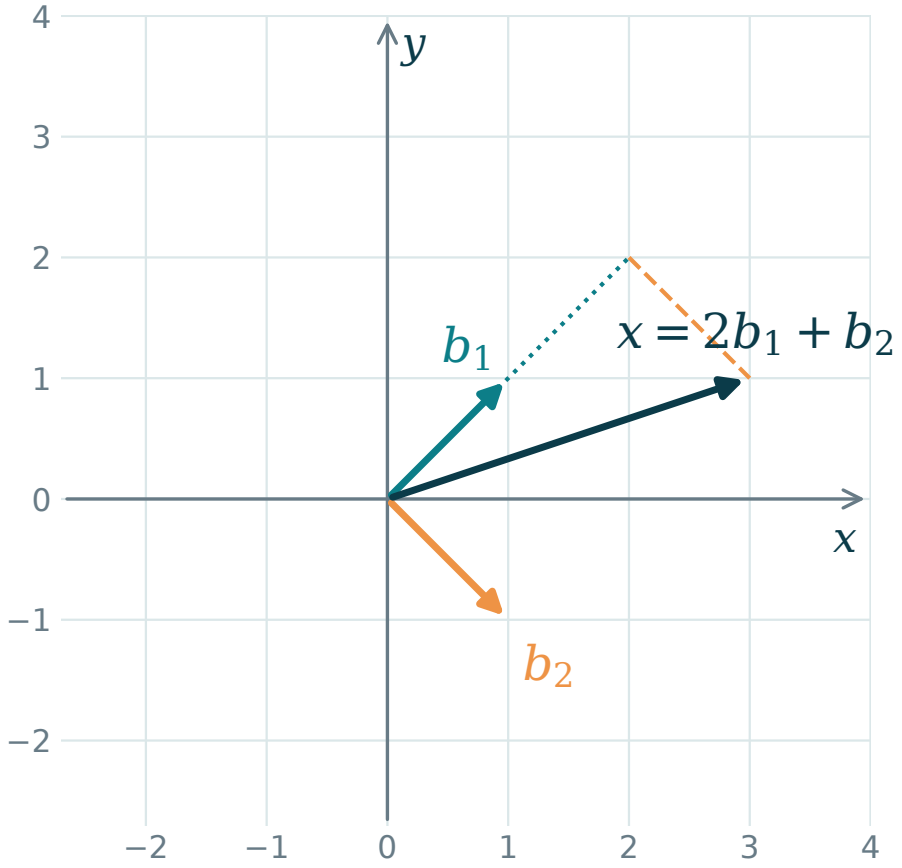
Нестандартный базис плоскости

$$b_1 = (1, 1), \qquad b_2 = (1, -1)$$

Векторы не лежат на одной прямой и порождают всю плоскость.

$$(3, 1) = 2b_1 + b_2$$

Коэффициенты зависят от выбора базиса.
Сам вектор при этом остаётся тем же.



Координаты в заданном базисе

Для $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ найдём координаты вектора $v = (5, 1)$.

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = (\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (5, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5, \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 3,\ \beta = 2$$

Координатный столбец в этом базисе равен $(3, 2)^{\mathsf{T}}$, а в стандартном базисе равен $(5, 1)^{\mathsf{T}}$.

Извлечение базиса из порождающей системы

Если один вектор является комбинацией остальных, его можно удалить без изменения линейной оболочки.

Повторяя удаление избыточных векторов в конечной системе, получаем независимую порождающую систему, то есть базис её оболочки.

$$w = u + v \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{span}(u, v, w) = \operatorname{span}(u, v)$$

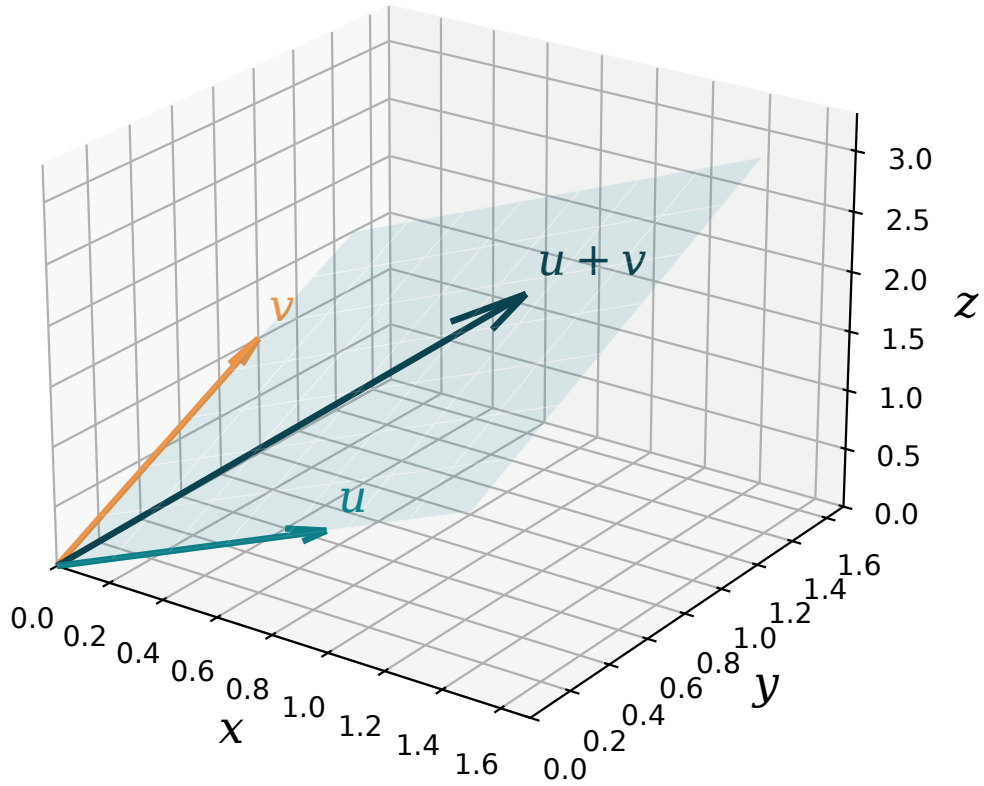
Независимость оставшихся векторов нужно проверять отдельно.

Базис плоскости в пространстве

$u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$,
$w = (1, 1, 2) = u + v$.

Векторы u и v независимы: первые две координаты нулевой комбинации дают нулевые коэффициенты.

Система u, v является базисом оболочки всех трёх векторов. Геометрически это плоскость z = x + y.



Размерность пространства

Теорема: все базисы конечномерного векторного пространства содержат одинаковое число векторов.

$$\dim V = \text{число векторов в любом базисе } V$$

В частности, $\dim \mathbb{F}^n = n$. Если V порождается конечной системой, после удаления избыточных векторов получается конечный базис.

Пространство, состоящее только из нуля, имеет пустой базис и размерность 0.

Базис пространства многочленов

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

Система $1, t, \ldots, t^n$ порождает P_n. Нулевая комбинация является нулевым многочленом только при всех нулевых коэффициентах.

$$\dim P_n = n + 1$$

Верхний индекс степени и размерность различаются на 1 из-за постоянного многочлена.

Базис пространства матриц

Обозначим через E_{ij} матрицу, у которой элемент в позиции (i, j) равен 1, а все остальные элементы равны нулю.

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Представление существует и единственно, поскольку каждый коэффициент восстанавливается по соответствующему элементу матрицы.

$$\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$$

Ранг конечной системы векторов

Ранг системы векторов: максимальное число линейно независимых векторов, которые можно выбрать из этой системы.

$$\operatorname{rank}(v_1, \dots, v_k) = \dim \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$$

Максимальная независимая подсистема порождает ту же оболочку. Иначе к ней можно было бы добавить вектор и сохранить независимость.

Ранг системы из одних нулевых векторов равен 0.

Ранг матрицы: определение по минорам

Ранг матрицы A: наибольший порядок её ненулевого минора. Для нулевой матрицы ранг полагают равным 0.

$$0 \le \operatorname{rank} A \le \min(m, n) \qquad (A \text{ размера } m \times n)$$

Если существует ненулевой минор порядка r, ранг не меньше r. Чтобы доказать равенство, нужно также исключить ненулевые миноры больших порядков.

Для квадратной матрицы порядка n ненулевой определитель означает ранг n.

Пример вычисления ранга по минорам

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ненулевой минор второго порядка получен из первой и третьей строк и первых двух столбцов. Поэтому ранг не меньше 2.

Полный определитель равен нулю: вторая строка вдвое больше первой. Более высоких порядков нет. Следовательно, ранг равен 2.

Ранг строк и ранг столбцов

Столбцы матрицы можно рассматривать как систему векторов. Строки также образуют систему векторов, но в другом числовом пространстве.

$$\text{Ранг строк} = \text{ранг столбцов} = \operatorname{rank} A$$

Это теорема о ранге. Её обоснование через ступенчатую форму и способы вычисления ранга рассмотрим в следующей лекции.

Типичные ошибки

Зависимость	В нетривиальной связи хотя бы один коэффициент должен быть ненулевым.
Базис	Одного порождения недостаточно: нужна также независимость.
Координаты	Числовой набор координат зависит от выбранного базиса.
Ранг по минорам	Одного ненулевого минора недостаточно для точного ранга: это даёт только нижнюю оценку.

Самостоятельная работа

1. Исследуйте пару $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ на зависимость.

2. Выберите базис оболочки $p_1 = 1 + t$, $p_2 = t + t^2$, $p_3 = 1 + 2t + t^2$.

3. Найдите координаты $(4, 2)$ в базисе $(1, 1)$, $(1, -1)$.

4. Найдите ранг $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы к самостоятельной работе

1. Зависимы: $2(1,2,3) - (2,4,6) = 0$.

2. $p_3 = p_1 + p_2$. Пара p_1, p_2 независима и является базисом оболочки. Её размерность равна 2.

3. Координаты равны $(3,1)$, поскольку $3(1,1) + (1,-1) = (4,2)$.

4. Ранг равен 2: левый верхний минор второго порядка равен 1, а третья строка является суммой первых двух.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Как отличить тривиальную связь от нетривиальной?
2. Почему зависимый вектор можно выразить через остальные?
3. Какие два условия определяют базис?
4. Почему представление вектора по базису единственно?
5. Чем размерность оболочки связана с рангом системы векторов?
6. Как доказать точное значение ранга по минорам?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Название электронного курса содержит активную ссылку.