Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 7

Векторные пространства

Линейные комбинации векторов
Подпространства и линейная оболочка

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 3. Векторная алгебра

Цель и план лекции

Цель: понимать определение векторного пространства и представлять векторы в виде линейных комбинаций.

Основные понятия

Поле скаляров и вектор.
Аксиомы векторного пространства.
Подпространство и линейная оболочка.

Основные действия

Сложение векторов и умножение на число.
Проверка замкнутости.
Нахождение коэффициентов комбинации.

Результат: отличать векторное пространство от произвольного множества и исследовать принадлежность линейной оболочке.

Что может быть вектором

Векторное пространство объединяет объекты, которые можно складывать и умножать на числа по единым правилам.

$$(x_1, \dots, x_n), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad p(t) = a + bt + ct^2$$

Векторами могут служить числовые наборы, матрицы, многочлены и функции. Геометрические стрелки являются одним из примеров.

Смысл слова «вектор» определяется пространством и выбранными операциями.

Поле скаляров и две операции

Пусть $\mathbb{F}$ является полем чисел. В этой лекции $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Элементы поля называют скалярами.

$$u + v \in V, \qquad \lambda u \in V \qquad (u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{F})$$

На множестве V задают сложение векторов и умножение вектора на скаляр. Результаты обеих операций должны оставаться в V.

Само поле скаляров является частью определения пространства.

Аксиомы сложения векторов

$$u + v = v + u, \qquad (u + v) + w = u + (v + w)$$

В V существует нулевой вектор 0_V, для которого $u + 0_V = u$ при любом $u \in V$.

Для каждого $u \in V$ существует противоположный вектор $-u$, удовлетворяющий $u + (-u) = 0_V$.

Таким образом, сложение позволяет изменять порядок слагаемых и группировку, а вычитание задаётся через противоположный вектор.

Аксиомы умножения на скаляр

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \qquad 1u = u$$

Эти равенства выполняются для любых $u, v \in V$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Вместе с аксиомами сложения они задают векторное пространство.

Следствия из аксиом

$$0u = 0_V, \qquad \lambda 0_V = 0_V, \qquad (-1)u = -u$$

Например, $(0+0)u = 0u + 0u$. Левая часть равна $0u$, поэтому прибавление противоположного вектора даёт $0u = 0_V$.

Если $\lambda u = 0_V$ и $\lambda \neq 0$, умножение на λ^{-1} даёт $u = 0_V$.

Нулевой вектор единственен. Его вид зависит от пространства: нулевой набор, нулевая матрица, нулевой многочлен.

Пространство числовых наборов

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Пример в $\mathbb{R}^3$: $(1, 2, -1) + 2(0, 1, 3) = (1, 4, 5)$. Нулевой вектор имеет все координаты, равные нулю.

Пространство матриц одного размера

Множество $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ всех матриц одного размера является векторным пространством с обычными сложением и умножением на число.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Нулевой вектор здесь является нулевой матрицей. Матрицы разных размеров нельзя объединять в такое пространство с обычным сложением.

Пространство многочленов

$$P_2 = \{a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Сумма двух многочленов степени не выше 2 снова имеет степень не выше 2. Умножение на число также сохраняет это условие.

$$(1 + t) + 2(t + t^2) = 1 + 3t + 2t^2$$

Нулевой многочлен включён в P_2. Множество многочленов степени ровно 2 векторным пространством не является.

Одно множество над разными полями

Множество $\mathbb{C}$ можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{R}$ и как векторное пространство над $\mathbb{C}$.

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$z = z \cdot 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Допустимые коэффициенты различаются. Поэтому вопросы о линейных комбинациях, независимости и размерности зависят от поля скаляров.

Множества, не являющиеся пространствами

Положительные координаты

Множество $\{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$ не содержит нулевого вектора и не замкнуто относительно умножения на -1.

Неоднородное условие

Множество $\{(x, y) : x + y = 1\}$ не содержит нуля. Сумма двух его элементов удовлетворяет $x + y = 2$.

Чтобы опровергнуть свойство пространства, достаточно одного нарушения аксиомы или замкнутости.

Подпространство

Подмножество W векторного пространства V называют подпространством, если оно само является векторным пространством с теми же операциями.

Критерий: непустое W является подпространством, если оно замкнуто относительно сложения и умножения на любой скаляр.

$$u, v \in W,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \Longrightarrow \quad \alpha u + \beta v \in W$$

В частности, каждое подпространство содержит 0_V.

Однородное условие и подпространство

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

Нуль принадлежит W. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2, v_3)$ лежат в W. Тогда:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0 + 0 = 0$$

Умножение на λ сохраняет равенство: $\lambda(u_1 + u_2 - u_3) = 0$. Следовательно, W является подпространством.

Линейная комбинация векторов

Для заданных $v_1, \dots, v_k \in V$ и скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ выражение

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

называют линейной комбинацией этих векторов. Нулевые коэффициенты допустимы.

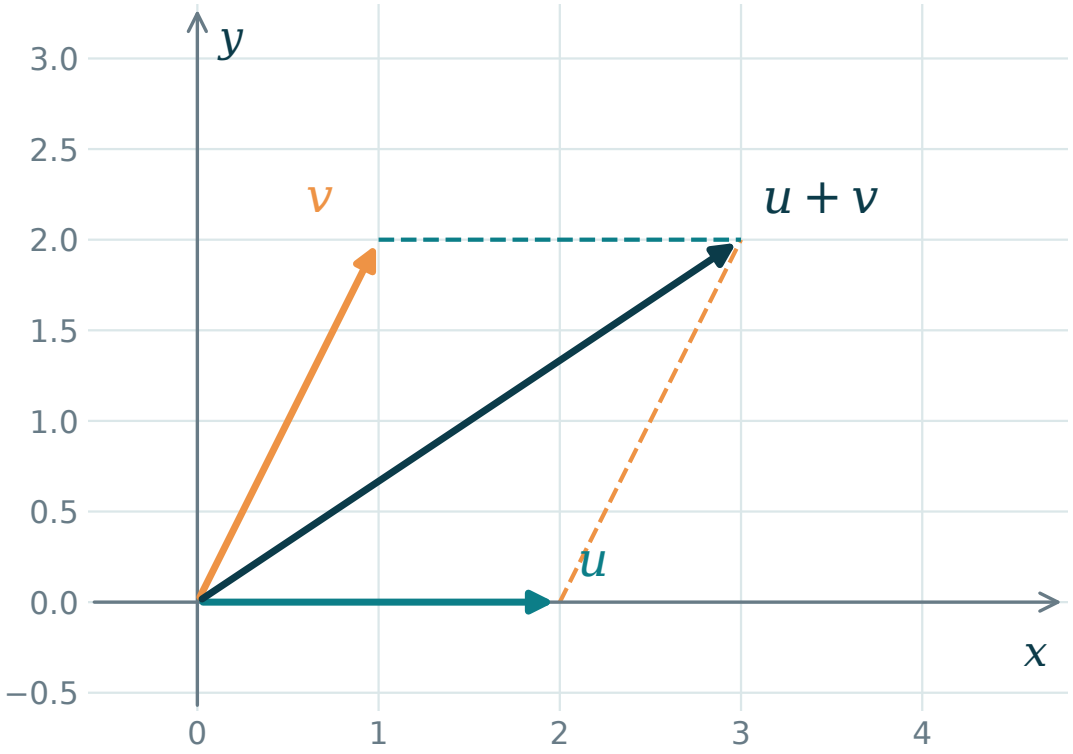
$$2(1,1,0) + 3(0,1,1) = (2,5,3)$$

Геометрический смысл линейной комбинации

В плоскости сложение соответствует правилу параллелограмма, а умножение на число изменяет длину и, при отрицательном коэффициенте, направление.

$$u = (2, 0), \qquad v = (1, 2)$$

$$u + v = (3, 2)$$



Линейная оболочка системы векторов

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j : \alpha_j \in \mathbb{F} \right\}$$

Линейная оболочка состоит из всех линейных комбинаций выбранных векторов. Она является подпространством.

Это наименьшее подпространство, содержащее каждый из исходных векторов: любое такое подпространство обязано содержать все их комбинации.

Почему линейная оболочка замкнута

$$u = \sum_j \alpha_j v_j, \qquad w = \sum_j \beta_j v_j$$

$$\lambda u + \mu w = \sum_j (\lambda \alpha_j + \mu \beta_j) v_j$$

Полученная комбинация снова принадлежит той же оболочке. Нулевой вектор получается, когда все коэффициенты равны нулю.

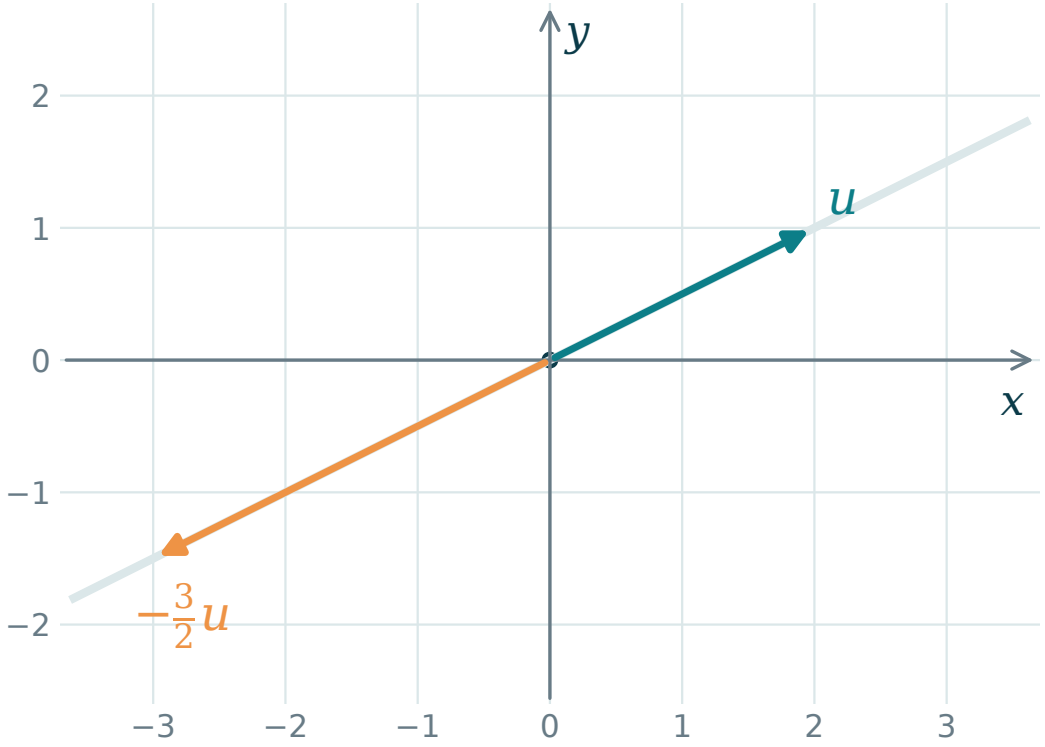
Критерий подпространства выполнен.

Оболочка одного ненулевого вектора

$$\operatorname{span}(u) = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Для ненулевого геометрического вектора множество всех его вещественных кратных задаёт прямую через начало координат.

При $u = 0$ оболочка состоит только из нулевого вектора.



Два вектора и плоскость в пространстве

$$u = (1, 1, 0), \qquad v = (0, 1, 1)$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha, \alpha + \beta, \beta)$$

Поэтому любой вектор оболочки удовлетворяет условию $y = x + z$. Обратно, $(x, x + z, z) = xu + zv$.

$$\text{span}(u, v) = \{(x, y, z) : y = x + z\}$$

Принадлежность оболочке как задача о системе

Чтобы представить b как комбинацию $v_1, \dots, v_k$, решаем уравнение $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = b$.

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) = (2,5,3)$$

$$\alpha = 2, \quad \alpha + \beta = 5, \quad \beta = 3$$

Условия согласованы. Следовательно, представление существует: b = 2u + 3v.

Пример отсутствия представления

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) = (1,0,1)$$

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \alpha + \beta = 0$$

Первые два условия дают сумму, равную 2, что противоречит третьему. Представления не существует.

Та же проверка через уравнение плоскости: $0 \neq 1 + 1$. Вектор не принадлежит оболочке.

Неединственность представления

$$u = (1, 0), \qquad v = (0, 1), \qquad w = (1, 1)$$

$$(3, 2) = 3u + 2v = u + 2w$$

$$(3, 2) = (3 - t)u + (2 - t)v + tw \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Система содержит избыточный вектор: w = u + v. В следующей лекции свяжем единственность представления с базисом.

Линейные комбинации многочленов

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = t + t^2$$

Найдём α и β, если $\alpha p_1 + \beta p_2 = 2 + 5t + 3t^2$. Приравниваем коэффициенты одинаковых степеней:

$$\alpha = 2, \qquad \alpha + \beta = 5, \qquad \beta = 3$$

Получаем ту же линейную систему, что и для числовых наборов. Единые правила действуют для разных видов векторов.

Пересечение и объединение подпространств

Пересечение $U \cap W$ двух подпространств является подпространством: оно сохраняет обе замкнутости.

Объединение в общем случае подпространством не является. Например, объединение двух разных координатных осей не замкнуто относительно сложения.

$$(1,0) \in U, \quad (0,1) \in W, \quad (1,1) \notin U \cup W$$

Чтобы получить подпространство, содержащее обе оси, берут их линейную оболочку.

Типичные ошибки

Поле скаляров	Нужно указывать, над каким полем рассматривается пространство.
Замкнутость	Результаты сложения и умножения на любой скаляр должны оставаться в множестве.
Нулевой вектор	Подпространство обязательно содержит нуль исходного пространства.
Представление	Успешная проверка одного частного вектора не доказывает, что выбранная система порождает всё пространство.

Самостоятельная работа

1. Является ли $W = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$ подпространством $\mathbb{R}^3$?

2. Является ли $S = \{(x, y) : x + y = 2\}$ подпространством $\mathbb{R}^2$?

3. Представьте $(3, 7, 4)$ через $u = (1, 1, 0)$ и $v = (0, 1, 1)$.

4. Принадлежит ли $(1, 1, 1)$ оболочке тех же u и v?

5. Представьте $3 + 5t + 2t^2$ через $p_1 = 1 + t$ и $p_2 = t + t^2$.

Ответы к самостоятельной работе

1. Да: условие однородно и сохраняется при линейных комбинациях.

2. Нет: множество не содержит $(0, 0)$.

3. $(3, 7, 4) = 3u + 4v$.

4. Нет: из первой и третьей координат следует $\alpha = \beta = 1$, но тогда вторая координата равна 2.

5. $3 + 5t + 2t^2 = 3p_1 + 2p_2$.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Какие операции и аксиомы задают векторное пространство?
2. Почему множество многочленов степени не выше 2 содержит нуль?
3. Как проверяют, что множество является подпространством?
4. Почему линейная оболочка сама является подпространством?
5. Как задача о линейной комбинации превращается в линейную систему?
6. Почему коэффициенты представления могут быть неединственными?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Название электронного курса содержит активную ссылку.