Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 5

Определители порядка n

Индукционное определение и основные свойства
Миноры, алгебраические дополнения и вычисления

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 2. СЛАУ и матричная алгебра

Цель и план лекции

Цель: определить определитель произвольного порядка и использовать его свойства для вычислений.

Определение и разложения

Миноры и алгебраические дополнения.
Индукционное определение.
Разложение по строке или столбцу.

Свойства и вычисления

Влияние преобразований строк.
Треугольные матрицы.
Вычисление с помощью исключения.

Исходные знания: определители второго и третьего порядка, элементарные преобразования строк.

Минор элемента квадратной матрицы

Минор M_{ij} элемента a_{ij}: определитель порядка $n-1$, полученный удалением i-й строки и j-го столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

В примере удалены первая строка и второй столбец. Минор является числом, а не оставшейся таблицей элементов.

Алгебраическое дополнение элемента

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение отличается от минора знаком, который зависит от суммы индексов.

$$M_{12} = -8 \quad \Longrightarrow \quad C_{12} = (-1)^3(-8) = 8$$

Принятое здесь обозначение C_{ij} помогает отличать дополнение от элемента a_{ij} самой матрицы.

Шахматное правило знаков

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

В левом верхнем углу стоит плюс.
Вдоль каждой строки и каждого столбца знаки чередуются.
Знак определяется позицией, а не знаком элемента.

$$C_{11} = M_{11}, \qquad C_{12} = -M_{12}, \qquad C_{23} = -M_{23}$$

Сначала вычисляют минор, затем умножают его на знак позиции.

Индукционное определение определителя

База: определитель первого порядка равен единственному элементу, $\det(a_{11}) = a_{11}$.

Пусть определители порядка $n-1$ уже определены. Для матрицы A порядка $n \geq 2$ полагаем:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Это разложение по первой строке. Каждый минор вычисляют по тому же правилу для меньшего порядка.

Проверка определения для второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad M_{11} = d, \quad M_{12} = c$$

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c$$

Таким образом, индукционное определение согласуется с уже известной формулой второго порядка.

Для третьего порядка оно даёт те же шесть слагаемых, что и правило Саррюса.

Разложение по любой строке или столбцу

Теорема о разложении определителя позволяет выбирать удобную строку или удобный столбец.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{при фиксированном } i$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{при фиксированном } j$$

Если в выбранной строке или столбце много нулей, большинство слагаемых исчезает.

Пример: разложение по второй строке

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot C_{21} - C_{22} + 4C_{23}$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Получаем $\det A = -(-6) + 4 \cdot 3 = 18$, как в лекции 4.

Пример определителя четвёртого порядка

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

В первой строке только один ненулевой элемент. Поэтому в разложении по этой строке остаётся одно слагаемое.

$$D = 2M_{11}$$

Продолжение: вычисление оставшегося минора

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = 1\big((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2\big) - 2(3\cdot 2 - 1\cdot 0) = -16$$

$$D = 2\cdot(-16) = -32$$

Транспонирование и симметрия свойств

$$\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$$

Определитель не меняется при обмене строк и столбцов в процессе транспонирования всей матрицы.

Поэтому каждое свойство, сформулированное для строк, имеет аналогичную формулировку для столбцов.

При вычислениях можно выбрать преобразования строк или столбцов, последовательно учитывая их влияние.

Перестановка двух строк

Если поменять местами две строки, определитель изменит знак.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

После s перестановок двух строк возникает множитель, равный минус единице в степени s.

$$\det B = (-1)^s \det A$$

Множитель в строке и во всей матрице

Если одну строку умножить на λ, определитель умножится на λ. Общий множитель строки можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \qquad (A \text{ порядка } n)$$

При умножении всей матрицы множитель появляется в каждой из n строк.

Линейность по одной строке

При фиксированных остальных строках определитель линеен по выбранной строке. Если строка является суммой, определитель распадается на сумму двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a+u & b+v \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ c & d \end{vmatrix}$$

Это не означает линейности по всей матрице. Например, $\det(I_2 + I_2) = 4$, но $\det I_2 + \det I_2 = 2$.

Когда определитель равен нулю

Определитель равен нулю, если в матрице есть нулевая строка, две равные строки или две пропорциональные строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Для равных строк перестановка не меняет матрицу, но меняет знак определителя. Поэтому D = -D, откуда D = 0.

Прибавление к строке кратного другой строки

Пусть B получена из A заменой $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, где $i \neq j$. Тогда определитель сохраняется.

$$\det B = \det A$$

Доказательство: по линейности получаем сумму исходного определителя и определителя с двумя пропорциональными строками. Второе слагаемое равно нулю.

$$\det B = \det A + \lambda \cdot 0 = \det A$$

Определитель треугольной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Для верхнетреугольной матрицы разложение по первому столбцу оставляет одно слагаемое. Далее применяем индукцию.

Для нижнетреугольной матрицы утверждение следует из транспонирования.

Вычисление определителя методом исключения

Приводим матрицу к треугольному виду. При этом записываем, как каждый шаг влияет на определитель.

Прибавление кратной строки	Определитель сохраняется.
Перестановка двух строк	Знак определителя меняется.
Умножение строки на $\lambda \neq 0$	Определитель умножается на λ.
Треугольная матрица	Вычисляем произведение диагональных элементов.

Пример исключения без перестановок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Преобразования: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
затем $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$. Все они сохраняют определитель.

$$\det A = \det T = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Пример исключения с перестановкой строк

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Сначала $R_1 \leftrightarrow R_2$. Затем $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ и $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$. Единственная перестановка меняет знак.

$$\det T = -\det A, \qquad \det A = -1 \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

Определитель произведения матриц

Для квадратных матриц A и B одного порядка справедливо:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Это свойство относится к определителям, хотя сами матрицы могут не коммутировать: $AB \neq BA$. При этом $\det(AB) = \det(BA)$.

Определитель и единственность решения

Для квадратной матрицы A порядка n условие $\det A \neq 0$ эквивалентно наличию n ведущих элементов при исключении.

Действительно, элементарные преобразования меняют определитель только на ненулевой множитель. В треугольном виде он равен произведению ведущих элементов.

$$\det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AX = b \text{ имеет ровно одно решение для любого } b$$

При $\det A = 0$ неоднородная система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

Сравнение методов вычисления

Разложение	Удобно при большом числе нулей. Требует аккуратно вычислять миноры и знаки дополнений.
Свойства строк	Позволяют создавать нули и сокращать вычисления до раскрытия определителя.
Приведение к треугольному виду	Подходит для матриц произвольного порядка. Нужно учитывать перестановки и масштабирование строк.

Для одного определителя можно последовательно сочетать несколько методов.

Типичные ошибки при вычислениях

Минор и дополнение	В $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ учитывают знак позиции.
Перестановка	Смена двух строк меняет знак определителя.
Общий множитель	Для матрицы порядка n выполнено $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
Линейность	Линейность действует по одной строке при фиксированных остальных строках. Определитель суммы не равен в общем случае сумме определителей.

Самостоятельная работа

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите M_{12} и C_{12}.
2. Вычислите $\det A$ любым способом.
3. Найдите $\det(2A)$ и определитель после перестановки первых двух строк A.
4. Найдите определитель верхнетреугольной матрицы с диагональю $2, -1, 3, 4$.

Ответы к самостоятельной работе

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{12} = 2$$

$$\det A = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 7$$

3. $\det(2A) = 2^3 \cdot 7 = 56$. После перестановки строк получаем -7.

4. $2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Как индукционное определение сводит порядок определителя?
2. Чем минор отличается от алгебраического дополнения?
3. Почему прибавление кратной другой строки сохраняет определитель?
4. Как учесть перестановку строк при приведении к треугольному виду?
5. Чем отличается умножение одной строки от умножения всей матрицы?
6. Что означает ненулевой определитель для квадратной системы?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.