Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 6

Обратная матрица

Критерий обратимости
Формула через дополнения и метод Гаусса-Жордана

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 2. СЛАУ и матричная алгебра

Цель и план лекции

Цель: устанавливать обратимость квадратной матрицы и находить обратную матрицу двумя способами.

Теоретические результаты

Определение и единственность.
Критерий через определитель.
Присоединённая матрица и формула обратной.

Практические методы

Метод Гаусса-Жордана.
Проверка матричным произведением.
Решение систем и матричных уравнений.

Исходные знания: матричное произведение, определитель, дополнения и преобразования строк.

Определение обратной матрицы

Пусть A является квадратной матрицей порядка n. Матрицу B того же порядка называют обратной к A, если:

$$AB = BA = I_n$$

Обозначение: $B = A^{-1}$. Матрицу, имеющую обратную, называют обратимой или невырожденной.

Обратная матрица определяется относительно матричного умножения. Обращать каждый элемент по отдельности нельзя.

Пример и проверка определения

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично $BA = I_2$. Следовательно, $B = A^{-1}$.

Критерий обратимости

$$A \text{ обратима} \iff \det A \neq 0$$

Необходимость

Если $AB = I_n$, то
$\det A \cdot \det B = 1$.
Поэтому $\det A \neq 0$.

Достаточность

Если $\det A \neq 0$, исключение даёт n ведущих элементов.
Матрицу A можно привести к I_n обратимыми преобразованиями строк.

Применив те же преобразования к единичной матрице, получим обратную. Этот вывод обоснуем в методе Гаусса-Жордана.

Единственность обратной матрицы

Предположим, что B и C являются обратными к одной матрице A. Тогда $BA = I_n$ и $AC = I_n$.

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Следовательно, у обратимой матрицы существует ровно одна обратная матрица.

Поэтому разные корректные методы вычисления должны приводить к одному и тому же ответу.

Присоединённая матрица

Пусть $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ являются алгебраическими дополнениями элементов a_{ij}. Сначала составим матрицу дополнений $C = (C_{ij})$.

$$\operatorname{adj} A = C^{\mathsf{T}} = (C_{ji})$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Для присоединённой матрицы обязательно транспонируют таблицу дополнений.

Формула обратной матрицы

$$A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \, A = (\det A) I_n$$

На главной диагонали произведения возникают разложения определителя. Вне диагонали получаются определители с двумя равными строками или столбцами.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \qquad (\det A \neq 0)$$

При ненулевом определителе деление тождества на det A даёт определение обратной матрицы.

Обратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \Delta = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Меняем местами диагональные элементы, меняем знаки двух остальных и делим всю полученную матрицу на определитель.

Пример вычисления по формуле

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 1$, $3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$.

Остальные элементы произведения также дают $AA^{-1} = I_2$.

Пример матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь $\det A = 2$, а C состоит из алгебраических дополнений.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Почему вырожденную матрицу нельзя обратить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad Av = 0$$

Если бы существовала A^{-1}, умножение равенства $Av = 0$ на A^{-1} дало бы $v = 0$. Получили противоречие.

В этом примере $\det A = 0$, строки пропорциональны, и разные исходные столбцы могут иметь одинаковый образ.

Свойства обратных матриц

Пусть A и B обратимы и имеют один порядок. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$$

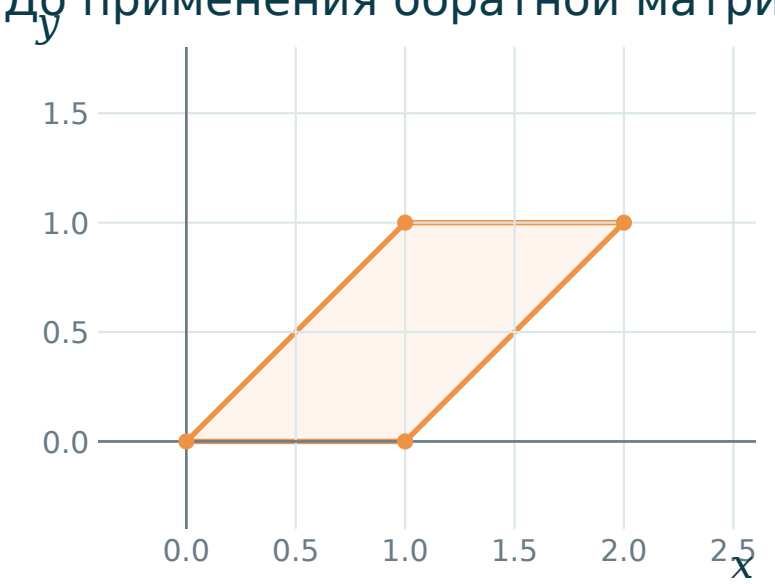
$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A$$

При обращении произведения порядок множителей меняется. Это обеспечивает взаимное сокращение соседних обратных множителей.

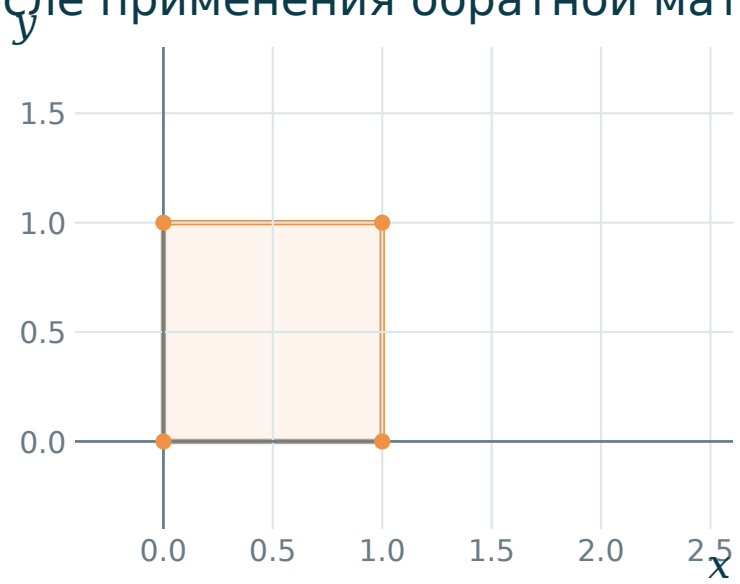
Обратная матрица отменяет преобразование

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

До применения обратной матрицы



После применения обратной матрицы



Сначала A переводит квадрат в параллелограмм. Затем обратная матрица восстанавливает квадрат.

Метод Гаусса-Жордана

Приписываем к матрице A справа единичную матрицу того же порядка. Все преобразования выполняем над целыми строками расширенной таблицы.

$$[\,A \mid I_n\,] \quad \longrightarrow \quad [\,I_n \mid A^{-1}\,]$$

В отличие от обычного прямого хода Гаусса, создаём нули и ниже, и выше ведущих элементов. Каждый ведущий элемент приводим к 1.

Если левую часть нельзя привести к единичной матрице, исходная матрица необратима.

Почему метод Гаусса-Жордана работает

Каждое элементарное преобразование строк является умножением слева на обратимую элементарную матрицу. Их произведение обозначим E.

$$[\,A \mid I_n\,] \quad \longrightarrow \quad [\,EA \mid E\,]$$

Если $EA = I_n$, то $A = E^{-1}$ и, следовательно, $E = A^{-1}$. Поэтому справа получается именно обратная матрица.

Все шаги обратимы, и одна и та же последовательность действий применяется к обеим половинам таблицы.

Пример 1: начало метода Гаусса-Жордана

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Переставим строки: $R_1 \leftrightarrow R_2$. Затем выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Пример 1: завершение вычислений

Умножим вторую строку на -1. Затем выполним $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 2: матрица третьего порядка

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Выполним $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, затем $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$. Получаем третью строку с единственным ненулевым элементом слева.

$$R_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Пример 2: нормирование ведущего элемента

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Делим третью строку на 2: $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$. Все элементы справа делятся на 2 вместе с левой частью.

$$R_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Пример 2: обратный ход

Сначала $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$, затем $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$. Используем уже обновлённые строки.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Правая часть совпадает с результатом, полученным через алгебраические дополнения. Левая часть равна единичной матрице.

Решение системы через обратную матрицу

$$AX = b, \quad \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матричные уравнения и порядок умножения

Пусть A и C обратимы, а размеры всех произведений согласованы.

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$XA = B \quad \Longrightarrow \quad X = BA^{-1}$$

$$AXC = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}BC^{-1}$$

Обратный множитель ставят с той стороны, с которой нужно устранить исходную матрицу.

Проверка найденной обратной матрицы

Проверяем обычное матричное произведение исходной матрицы A и найденного кандидата B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для квадратных матриц $AB = I_n$ уже гарантирует $B = A^{-1}$ и $BA = I_n$.

Типичные ошибки при обращении матриц

Поэлементное обращение	Матрица A^{-1} в общем случае не равна таблице $1/a_{ij}$.
Присоединённая матрица	После вычисления дополнений таблицу обязательно транспонируют.
Преобразования строк	Каждый шаг применяют к обеим частям расширенной таблицы.
Порядок множителей	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Переставлять матрицы произвольно нельзя.

Самостоятельная работа

1. Найдите обратную к $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Решите $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Обратима ли $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

В задачах 1 и 2 проверьте ответ прямой подстановкой или умножением.

Дополнительная задача: треугольная матрица

Найдите обратную матрицу методом Гаусса-Жордана. Проверьте ответ умножением.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подсказка: определитель равен 1. При исключении достаточно создать нули над главной диагональю.

Ответы к самостоятельной работе

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $(x, y) = (3, 1)$. Проверка: $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $3 + 1 = 4$.

3. Определитель равен $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$, матрица необратима.

В задаче 1 определитель исходной матрицы равен -1.

Ответ к дополнительной задаче

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Произведение равно единичной матрице, поэтому найденная матрица является обратной.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Как связаны обратимость и определитель квадратной матрицы?
2. Почему обратная матрица единственна?
3. Как получить присоединённую матрицу из дополнений?
4. Почему справа в методе Гаусса-Жордана получается обратная?
5. Чем метод Гаусса-Жордана отличается от прямого хода Гаусса?
6. С какой стороны умножать на обратную матрицу при решении $XA = B$?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.