Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 4

Матрицы и определители

Действия над матрицами и их свойства
Определители второго и третьего порядка

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 2. СЛАУ и матричная алгебра

Цель и план лекции

Цель: выполнять основные действия над матрицами и вычислять определители второго и третьего порядка.

Матричные действия

Размер и элементы матрицы.
Сложение и умножение на число.
Произведение и транспонирование.

Определители

Определитель второго порядка.
Геометрический смысл.
Определитель третьего порядка и правило Саррюса.

Особое внимание: условия согласования размеров и порядок множителей.

Матрица и её элементы

Матрица размера $m \times n$ представляет собой прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов.

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Индекс i указывает строку, индекс j указывает столбец. В примере $a_{21} = -1$, $a_{23} = 4$, размер равен 2×3.

Элементы матриц в этой лекции принадлежат $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Квадратная, нулевая и единичная матрицы

Квадратная матрица

Число строк равно числу столбцов. Для размера $n \times n$ говорят о матрице порядка n.

Нулевая матрица

Все элементы равны нулю. Нулевая матрица может иметь любой размер.

Единичная матрица

На главной диагонали стоят единицы, вне её стоят нули.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица имеет нули вне главной диагонали. Матрица с одной строкой или одним столбцом также является матрицей.

Равенство и сложение матриц

Матрицы равны, если имеют одинаковый размер и совпадающие соответствующие элементы. Складывать можно матрицы одного размера.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Для матриц разных размеров сумма не определена.

Умножение на число и линейная комбинация

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Выражение $\alpha A + \beta B$ называют линейной комбинацией матриц одного размера. Вычитание задают формулой $A - B = A + (-1)B$.

Например, $2A - B$ вычисляют поэлементно: $(2A - B)_{ij} = 2a_{ij} - b_{ij}$.

Свойства сложения и умножения на число

Все матрицы в формулах имеют один и тот же размер. Буквы α и β обозначают числа.

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \qquad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

Нулевая матрица удовлетворяет $A + 0 = A$. Противоположная матрица $-A$ удовлетворяет $A + (-A) = 0$.

Транспонирование матрицы

При транспонировании строки становятся столбцами. Индексы меняются местами.

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Если размер A равен $m \times n$, то размер A^{T} равен $n \times m$.

Умножение матриц: согласование размеров

$$A_{m\times p}\,B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй. Результат содержит m строк и n столбцов.

$$C = AB, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Элемент результата получают, умножая элементы i-й строки A на соответствующие элементы j-го столбца B и складывая произведения.

Пример произведения прямоугольных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Размеры: $(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2$. Например:

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Порядок множителей имеет значение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Оба произведения определены, но $AB \neq BA$. Для прямоугольных матриц одно из произведений может вообще не существовать.

Свойства матричного произведения

Во всех формулах предполагается, что размеры согласованы.

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$$

$$I_m A = A, \qquad AI_n = A \qquad (A \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

Скобки в произведении можно переставлять, сохраняя порядок самих матриц.
Поэлементное умножение не является матричным произведением.

Ненулевые матрицы с нулевым произведением

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из $AB = 0$ в общем случае не следует $A = 0$ или $B = 0$. Сокращать общий матричный множитель без дополнительных условий нельзя.

Свойства транспонирования

$$(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A, \qquad (A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$$

$$(\lambda A)^{\mathsf{T}} = \lambda A^{\mathsf{T}}$$

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$$

В последнем равенстве порядок множителей меняется. Это согласуется с обменом строк и столбцов.

Для комплексных матриц обычное транспонирование не включает сопряжение элементов.

Матричная запись линейной системы

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$AX = b$$

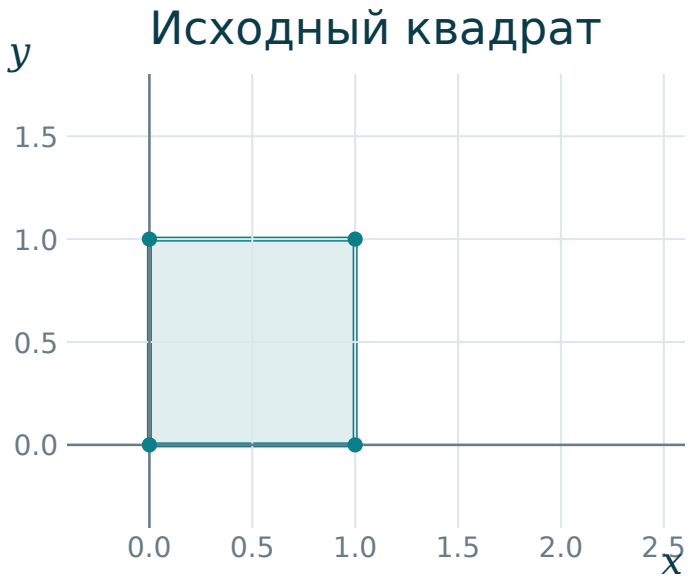
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

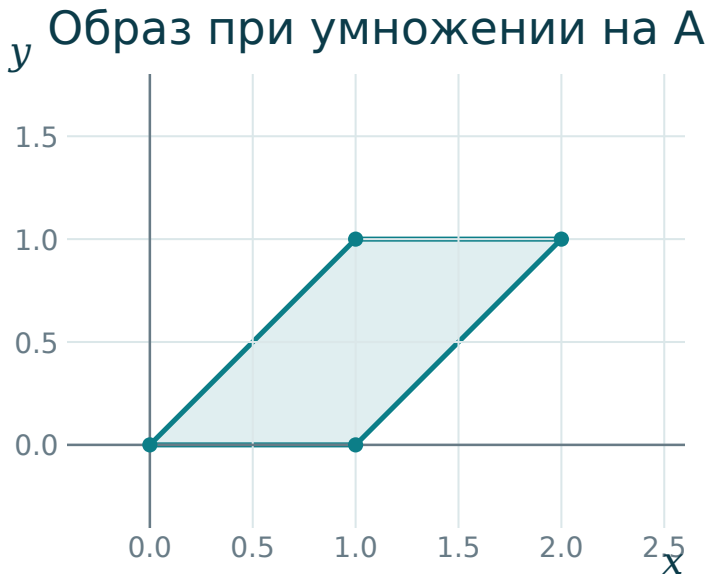
Произведение матрицы коэффициентов на столбец неизвестных воспроизводит левые части системы.

Матрица как преобразование плоскости

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}$$

Преобразование сохраняет y и прибавляет y к координате x. Квадрат переходит в параллелограмм.





Определитель второго порядка

Каждой квадратной матрице второго порядка сопоставим число по правилу:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Определитель является числом, а матрица является таблицей. Для прямоугольной матрицы обычный определитель не определяют.

Примеры определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$$

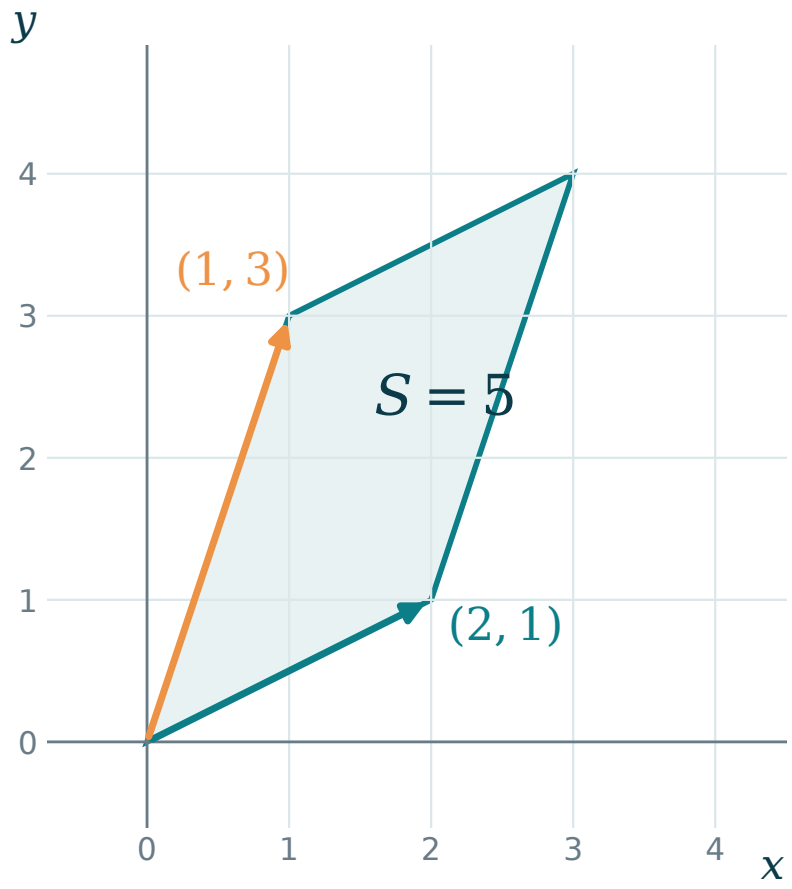
Во втором примере первая строка вдвое больше второй. Геометрический смысл нулевого определителя рассмотрим через площадь.

Определитель и площадь параллелограмма

Столбцы действительной матрицы второго порядка задают два вектора на плоскости.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 5$$

Площадь параллелограмма равна $|\det A|$. Знак определителя учитывает ориентацию упорядоченной пары векторов.



Определитель третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

$$\det A = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

В формуле три произведения берутся со знаком плюс и три со знаком минус. В каждом произведении участвуют элементы разных строк и столбцов.

Правило Саррюса

Для запоминания формулы к таблице справа приписывают первые два столбца.

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & k & g & h \end{array}$$

Плюс: $aek + bfg + cdh$ Минус: $ceg + bdk + afh$

Правило Саррюса применяют только к определителям третьего порядка. Для четвёртого и более высоких порядков нужны другие методы.

Пример определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= (1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1) \\ &\quad - (3 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 1) \\ &= 16 - (-6 + 0 + 4) = 18. \end{aligned}$$

Сначала учитываем знаки самих элементов, затем вычитаем всю сумму второй группы.

Треугольные матрицы

У верхнетреугольной матрицы под главной диагональю стоят нули. У нижнетреугольной матрицы нули стоят над диагональю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$

При подстановке в формулу остаётся только произведение диагональных элементов. В следующей лекции докажем это для любого порядка.

Как выбрать способ вычисления

Второй порядок	Формула $ad - bc$.
Третий порядок	Правило Саррюса или раскрытие по строке после введения миноров.
Треугольная матрица	Произведение диагональных элементов.
Более высокий порядок	Разложение по строке или столбцу и преобразования строк. Эти методы изучим в лекции 5.

Историческая справка: теория матриц Кэли

В 1858 году Артур Кэли опубликовал работу A Memoir on the Theory of Matrices, посвящённую систематическому изложению матричной алгебры.

Матрицы удобно рассматривать как самостоятельные объекты: их можно складывать, умножать и связывать с линейными преобразованиями.

Особенность этой алгебры уже видна на матрицах второго порядка: порядок умножения влияет на результат.

Источник: A. Cayley, Philosophical Transactions of the Royal Society, 148 (1858), 17-37.

Типичные ошибки в действиях над матрицами

Размеры	Перед действием проверяют размеры. Сумма и произведение имеют разные условия существования.
Произведение	Элементы произведения находят по правилу «строка на столбец».
Транспонирование	В формуле $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$ порядок меняется.
Определитель	Матрица и её определитель являются разными объектами. Правило Саррюса ограничено порядком 3.

Самостоятельная работа

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Найдите $A + B$ и A^{T}.
2. Вычислите AB и BA. Совпадают ли результаты?
3. Вычислите $\det A$.
4. Вычислите $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответы к самостоятельной работе

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$. В задаче 4 получаем $6 + 2 = 8$.
Произведения AB и BA различны.

Основные результаты и контрольные вопросы

1. Какие размеры должны иметь матрицы, чтобы существовало AB?
2. Как вычисляют отдельный элемент матричного произведения?
3. Почему умножение матриц в общем случае некоммутативно?
4. Как транспонировать произведение двух матриц?
5. Что означает модуль определителя второго порядка геометрически?
6. Почему правило Саррюса нельзя переносить на четвёртый порядок?

Литература и дополнительные материалы

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Дополнительное чтение

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

A. Cayley. A Memoir on the Theory of Matrices, 1858.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.