Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 14

Линии второго порядка

Эллипс, гипербола и парабола
Канонические уравнения и преобразования

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 4. Аналитическая геометрия

Цель и план лекции

Цель: распознавать линии второго порядка, находить их геометрические элементы и приводить уравнения к каноническому виду.

Геометрическое описание

Фокусы и расстояния.
Полуоси и эксцентриситет.
Директриса и асимптоты.

Преобразование уравнений

Выделение полных квадратов.
Перенос и поворот осей.
Проверка вырождения.

Координаты декартовы. Повороты и переносы сохраняют расстояния, углы и геометрический тип кривой.

Общее уравнение линии второго порядка

Линию второго порядка задаёт полиномиальное уравнение степени два по x и y.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть ненулевым. Слагаемое Bxy связывает координатные оси.

Вырожденные случаи могут задавать пару прямых, одну прямую, точку или пустое множество.

Окружность

Окружность состоит из точек, находящихся на постоянном расстоянии R от центра $C = (h, k)$.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2, \qquad R > 0$$

При $R = 0$ множество состоит из одной точки. Уравнение $(x - h)^2 + (y - k)^2 = -1$ действительных точек не имеет.

Окружность является частным случаем эллипса с равными полуосями.

Геометрическое определение эллипса

Пусть $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ и $a > c \geq 0$. Эллипс состоит из точек M с постоянной суммой расстояний до фокусов.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

Сумма 2a больше расстояния 2c между фокусами. Поэтому получается замкнутая невырожденная кривая.

При c=0 оба фокуса совпадают, и получается окружность радиуса a.

Каноническое уравнение эллипса

Обозначим расстояния до фокусов через r_1, r_2. Из $r_1 + r_2 = 2a$ и $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$ следует $r_1 = a + cx/a$.

$$b^2 = a^2 - c^2 > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Подстановка выражения для r_1 в квадрат расстояния даёт каноническую форму. Большая ось направлена вдоль Ox.

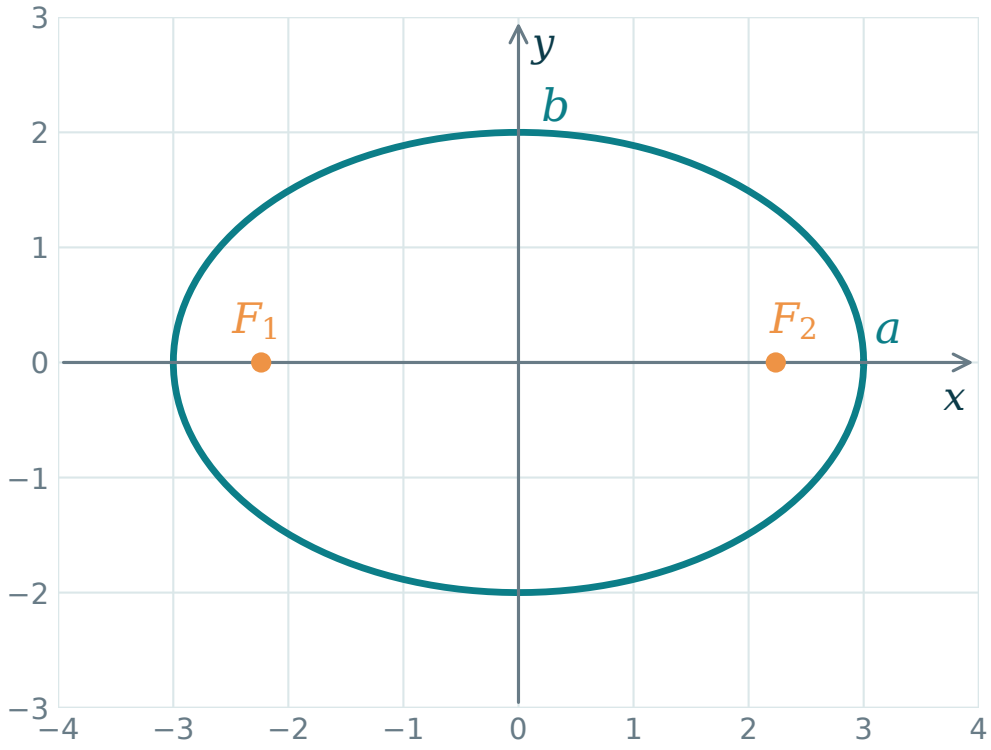
Эллипс и его фокусы

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Полуоси: $a = 3$, $b = 2$.

От центра до фокуса: $c = \sqrt{5}$.

Фокусы: $(\pm\sqrt{5}, 0)$.



Для каждой точки эллипса сумма расстояний до двух фокусов равна 6.

Геометрические элементы эллипса

Центр и оси	Центр (0,0). Длины главных осей равны 2a и 2b.
Вершины	На осях: $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$.
Фокусы	$F_{1,2} = (\pm c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$ при $a \geq b$.
Эксцентриситет	$e = c/a$, причём $0 \leq e < 1$. Чем ближе e к 1, тем сильнее вытянута форма.

Параметризация эллипса

Точки эллипса удобно задавать одним параметром. Тождество для синуса и косинуса сразу проверяет уравнение.

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

Подстановка даёт $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Все точки эллипса получаются при полном обороте параметра.

При разных полуосях параметр t обычно не равен полярному углу радиус-вектора.

Эллипс с перенесённым центром

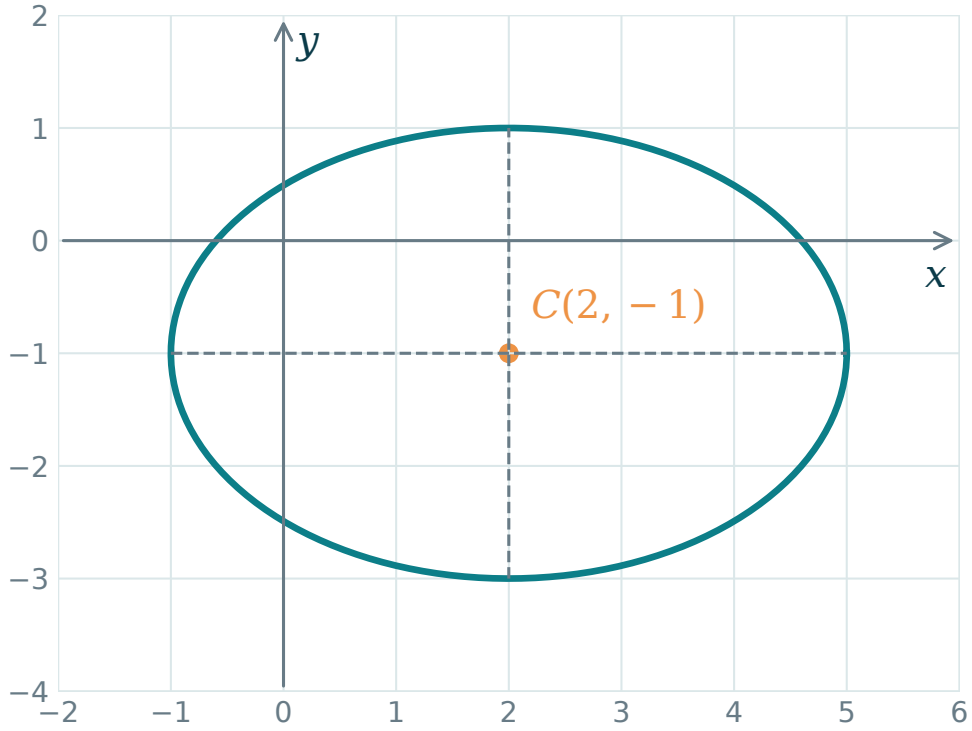
$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

Центр $C=(2,-1)$.

Полуоси равны 3 и 2.

Главные оси параллельны координатным.

Знаки координат центра определяют по выражениям x-h и y-k.



Выделение квадратов для эллипса

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

$$4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

После переноса центра и деления на 36 читаем полуоси непосредственно из знаменателей.

Геометрическое определение гиперболы

Пусть фокусы $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ и $c > a > 0$. Гипербола задаётся постоянным модулем разности расстояний.

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a$$

Из определения получается $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2 > 0$.

Кривая состоит из двух отдельных ветвей.

Гипербола и асимптоты

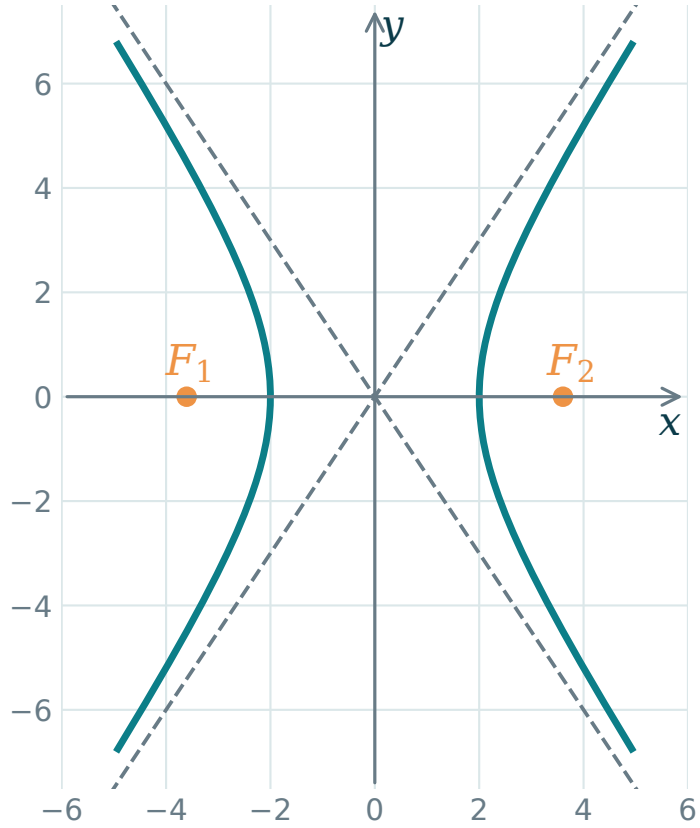
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$.

Вершины: $(\pm 2, 0)$.

Фокусы: $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

$$y = \pm\frac{3}{2}x$$



Геометрические элементы гиперболы

Центр	Начало координат. Каждая ветвь симметрична относительно действительной оси.
Действительная ось	Для $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ проходит вдоль Ox. Вершины $(\pm a, 0)$.
Фокусы	$c^2 = a^2 + b^2$, фокусы $(\pm c, 0)$.
Эксцентриситет	$e = c/a > 1$. Число b задаёт наклон асимптот, а точки $(0, \pm b)$ не лежат на кривой.

Гипербола с вертикальной осью

Положительный квадрат определяет действительную ось и направление раскрытия двух ветвей.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Вершины $(0, \pm a)$, фокусы $(0, \pm c)$, где $c^2 = a^2 + b^2$. Асимптоты: $y = \pm (a/b)x$.

Название полуоси a относится к действительной оси, а не обязательно к оси Ox.

Почему возникают асимптоты гиперболы

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (|x| \geq a)$$

При больших |x| корень близок к |x|. Разность с соответствующей прямой стремится к нулю.

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Асимптоты проходят через центр гиперболы. На канонической невырожденной гиперболе их точки не лежат.

Гипербола с перенесённым центром

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

Центр $C = (-2, 1)$. Действительная ось вертикальна. Вершины: $(-2, 1 \pm 2)$. Фокусы: $(-2, 1 \pm \sqrt{13})$.

$$y - 1 = \pm\frac{2}{3}(x+2)$$

Геометрическое определение параболы

Парабола состоит из точек, равноудалённых от фиксированной точки F и фиксированной прямой d, не проходящей через F.

$$|MF| = \rho(M, d)$$

Для формы $y^2 = 2px$, $p > 0$, берём $F = (p/2, 0)$ и директрису $d: \ x = -p/2$.

Расстояние от фокуса до директрисы равно $|p|$. Знак p задаёт направление раскрытия.

Вывод уравнения параболы

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = |x + p/2|$$

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

$$y^2 = 2px$$

При $p > 0$ из уравнения следует $x \geq 0$. Вершина находится в (0,0), ось симметрии совпадает с Ox.

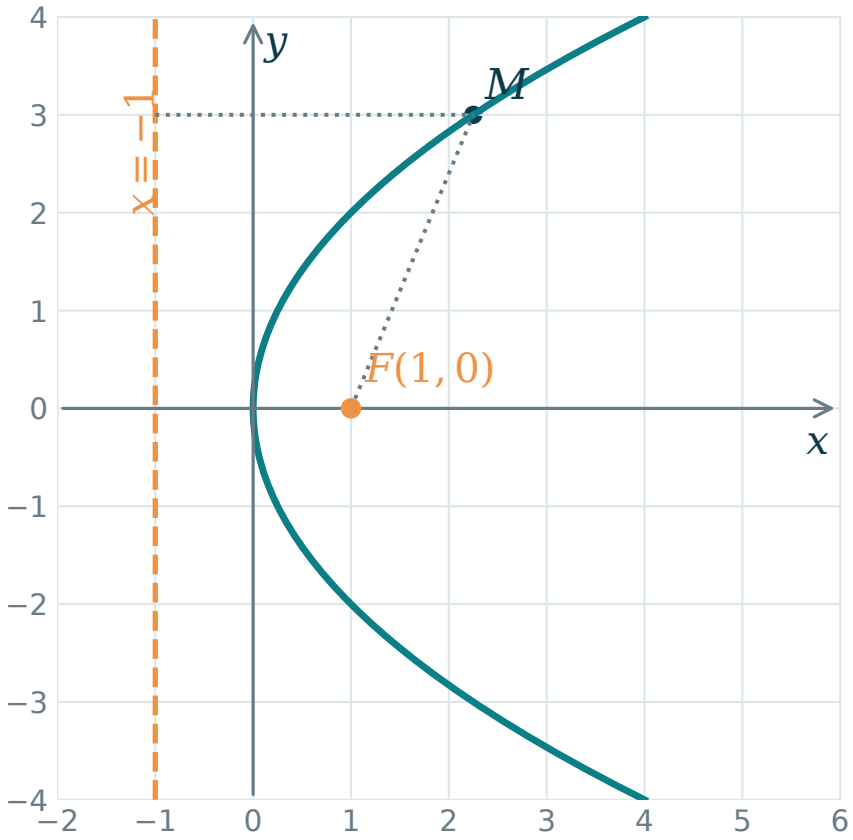
Фокус и директриса параболы

$$y^2 = 4x$$

Параметр $p = 2$.

Фокус $F = (1, 0)$.

Директриса $x = -1$.



Для точки M расстояние до фокуса равно длине перпендикуляра к директрисе.

Направление оси параболы

$$y^2 = 2px, \qquad p \neq 0$$

При $p > 0$ раскрытие направлено вправо, при $p < 0$ направлено влево. Фокус $(p/2, 0)$.

$$x^2 = 2py, \qquad p \neq 0$$

При $p > 0$ раскрытие направлено вверх, при $p < 0$ направлено вниз. Фокус $(0, p/2)$.

Парабола с перенесённой вершиной

Вершина $V = (h, k)$, горизонтальная ось. Каноническая форма после переноса начала:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Для $(y+1)^2 = 8(x-2)$ получаем $V = (2, -1)$, $p = 4$, $F = (4, -1)$ и директрису $x = 0$.

Фокус в общем виде: $(h + p/2, k)$. Директриса: $x = h - p/2$.

Выделение квадрата для параболы

$$y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$$

$$(y-2)^2 = 8(x-1)$$

Вершина (1,2), параметр $p = 4$, фокус (3,2), директриса $x = -1$.

При выделении квадрата добавленную константу учитывают и в свободном члене уравнения.

Единое фокально-директрисное описание

$$|MF| = e\,\rho(M, d), \qquad e > 0$$

$0 < e < 1$: эллипс с различными фокусами.

$e = 1$: парабола.

$e > 1$: гипербола.

Окружность имеет эксцентриситет 0 и рассматривается отдельно. Фокус и конечная директриса в этой формуле ей не соответствуют.

Сравнение канонических уравнений

Эллипс	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Два положительных квадрата, замкнутая кривая.
Гипербола	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Разные знаки квадратов, две ветви.
Парабола	$y^2 = 2px$. Одна переменная входит квадратично, другая линейно.
Перенос центра	Выражения x-h и y-k задают смещение соответствующего центра или вершины.

Поворот координатных осей

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

Подходящий поворот устраняет смешанное слагаемое Bxy. Коэффициент при XY после поворота равен:

$$B' = (C - A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta$$

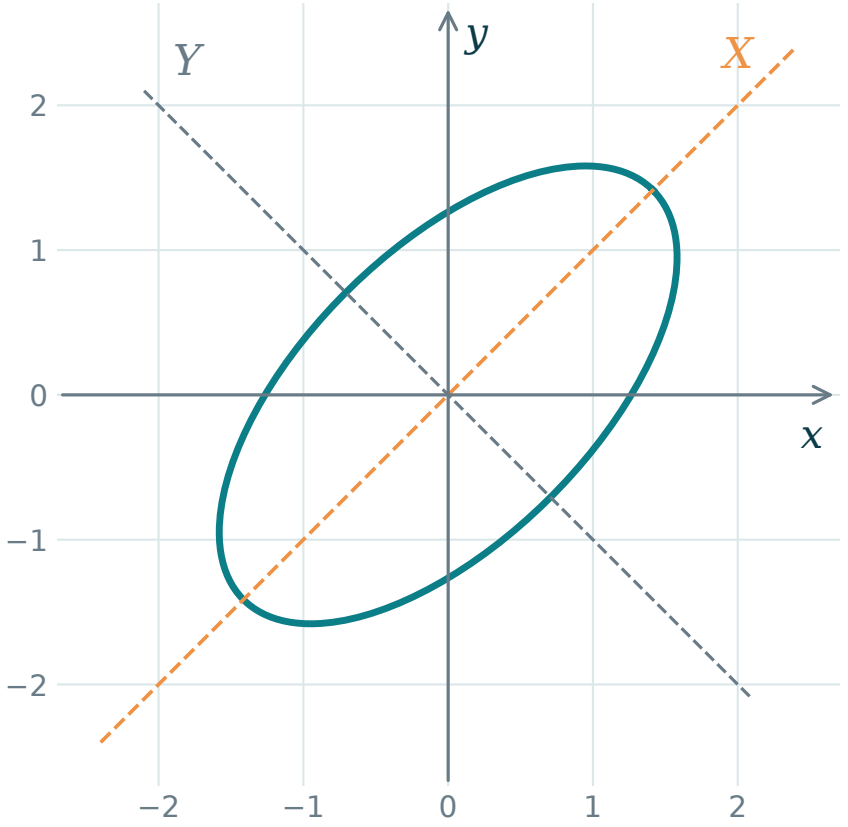
При $A \neq C$ можно выбрать $\tan 2\theta = B/(A - C)$. Для остальных случаев решают равенство $B' = 0$ без деления.

Пример эллипса с повёрнутыми осями

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$$



Полуоси 2 и 1. Главная ось направлена вдоль y=x.

Дискриминант квадратичной части

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Для невырожденной действительной кривой знак дискриминанта определяет тип:

$\Delta < 0$: эллиптический.

$\Delta = 0$: параболический.

$\Delta > 0$: гиперболический.

Проверку действительных точек и вырождения проводят отдельно. Только знака Δ недостаточно.

Вырожденные случаи

$x^2 + y^2 = 0$

Одна точка (0,0). Сумма неотрицательных слагаемых обращается в нуль только в начале.

$x^2 - y^2 = 0$

Две пересекающиеся прямые y=x и y=-x.

$x^2 - 1 = 0$

Две параллельные прямые x=1 и x=-1.

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

Пустое множество действительных точек.

Алгоритм распознавания кривой

1. Квадратичная часть	Устранить смешанное слагаемое поворотом и определить знаки коэффициентов при квадратах.
2. Перенос	Выделить полные квадраты и определить центр или вершину.
3. Нормировка	Получить каноническое уравнение. Проверить, существуют ли действительные точки.
4. Геометрия	Найти полуоси, фокусы, асимптоты или директрису. Отметить ось симметрии.

Типичные ошибки

Полуоси	Знаменатели канонического уравнения равны квадратам полуосей.
Положение фокусов	У эллипса $c^2 = a^2 - b^2$, у гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$.
Параметр параболы	В форме $y^2 = 2px$ фокус находится на расстоянии $\lvert p\rvert/2$ от вершины.
Дискриминант	Знак квадратичной части сам по себе не исключает точку, прямые или пустое множество.

Самостоятельная работа

1. Найдите фокусы эллипса $x^2/25 + y^2/9 = 1$.

2. Найдите фокусы и асимптоты гиперболы $x^2/9 - y^2/16 = 1$.

3. Найдите фокус и директрису параболы $y^2 = 12x$.

4. Определите центр и радиус: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

5. Какое множество задаёт уравнение $x^2 + 4y^2 = 0$?

Ответы к самостоятельной работе

1. $c = 4$, фокусы $(\pm 4, 0)$.

2. $c = 5$, фокусы $(\pm 5, 0)$, асимптоты $y = \pm(4/3)x$.

3. $p = 6$, фокус (3,0), директриса $x = -3$.

4. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$. Центр (2,-3), радиус 2.

5. Единственная точка (0,0).

Итоги и контрольные вопросы

1. Как задают эллипс, гиперболу и параболу через расстояния?
2. Как связаны a, b и c для эллипса и гиперболы?
3. Что означает эксцентриситет?
4. Как находят асимптоты гиперболы?
5. Как переносят центр и поворачивают оси координат?
6. Почему дискриминанта недостаточно для полной классификации?

Литература

Основная литература по аналитической геометрии

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра и задачи

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.