Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 1

Комплексные числа

Алгебраическая форма и действия
Геометрическое представление на плоскости

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 1. Поле комплексных чисел

Цель и план лекции

Цель: освоить алгебраическую форму комплексного числа и научиться выполнять основные действия.

Теоретическая часть

Мнимая единица и множество $\mathbb{C}$.
Равенство, сопряжение и модуль.
Свойства арифметических действий.

Практическая часть

Вычисления и простые уравнения.
Комплексные числа как точки и векторы.
Геометрический смысл модуля.

После лекции: записывать результат в виде $a + bi$ и проверять его алгебраически или геометрически.

Почему действительных чисел недостаточно

Для любого действительного x выполнено $x^2 \geq 0$. Поэтому уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в $\mathbb{R}$.

$$i^2 = -1$$

Вводим мнимую единицу i и сохраняем привычные законы сложения и умножения. Тогда появляются решения:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm i$$

Например, уравнение $x^2 + 4 = 0$ имеет решения $x = \pm 2i$.

Кардано: корни из отрицательных чисел

В книге Ars Magna (1545) Джероламо Кардано рассматривает задачу: найти два числа с суммой 10 и произведением 40.

$$x + y = 10, \quad xy = 40 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$x = 5 + i\sqrt{15}, \qquad y = 5 - i\sqrt{15}$$

$$(5 + i\sqrt{15})(5 - i\sqrt{15}) = 25 + 15 = 40$$

Возник вопрос: какие правила позволяют осмысленно работать с такими выражениями?

Исторический источник: T. Gantumur, Complex Numbers, §1 (McGill University).

Бомбелли: комплексные числа в вычислениях

Рафаэль Бомбелли в «Алгебре» (1572) исследует уравнение $x^3 = 15x + 4$. В формуле Кардано появляются выражения:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

В современных обозначениях можно выбрать кубические корни $2 + i$ и $2 - i$, поскольку:

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \qquad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

Их сумма равна 4, и $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$. Комплексные промежуточные вычисления приводят к действительному решению.

Источник: T. Gantumur, Complex Numbers, §1. Корни в исторической формуле выбираются согласованно.

Как сложилось современное понятие числа

XVIII век	Эйлер развивает вычисления с комплексными числами и вводит обозначение i.
1799	Вессель публикует геометрическую интерпретацию комплексных чисел.
1806	Арган независимо описывает комплексные числа средствами геометрии.
1831	Гаусс использует термин «комплексное число» и геометрическую модель.
1837	Гамильтон публикует арифметическую теорию пар действительных чисел.

Источники: MacTutor (Wessel, Argand), O. Merino, W. R. Hamilton (1837). Ссылки в конце лекции.

Комплексное число и алгебраическая форма

Комплексное число записывают в алгебраической форме:

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad i^2 = -1$$

Действительная часть

$\operatorname{Re} z = a$.
Для $z = 3 - 2i$ получаем $\operatorname{Re} z = 3$.

Мнимая часть

$\operatorname{Im} z = b$ является действительным числом.
Для $z = 3 - 2i$ имеем $\operatorname{Im} z = -2$.

Если $b = 0$, то $z \in \mathbb{R}$. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, число называют чисто мнимым. При $a = b = 0$ получаем $z = 0$.

Строгая модель: упорядоченные пары

Можно определить $\mathbb{C}$ как множество пар (a, b) действительных чисел. Правила действий задаются формулами:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

Отождествляем $a \in \mathbb{R}$ с парой $(a, 0)$ и обозначаем $i = (0, 1)$. Тогда $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, то есть $i^2 = -1$.

Запись $a + bi$ является удобным обозначением пары (a, b). Эта модель объясняет существование комплексных чисел.

Равенство комплексных чисел

$$a + bi = c + di \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, \quad b = d$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда совпадают их действительные и мнимые части.

Пример. Найдём действительные x и y из равенства:

$$(2x - 1) + (y + 3)i = 5 - 2i$$

$$2x - 1 = 5, \quad y + 3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = 3,\ y = -5$$

Степени мнимой единицы

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i$$

$$i^{n+4} = i^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Степени повторяются с периодом 4. Для неотрицательного целого показателя достаточно найти остаток от деления на 4.

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2 \quad \Longrightarrow \quad i^{2026} = i^2 = -1$$

Проверка: $i^4 = 1$, поэтому $i^{4q+r} = (i^4)^q i^r = i^r$.

Сложение и вычитание

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Сложение

$$(3-2i)+(-1+5i)$$
$$=(3-1)+(-2+5)i$$
$$=2+3i.$$

Вычитание

$$(3-2i)-(-1+5i)$$
$$=(3+1)+(-2-5)i$$
$$=4-7i.$$

При раскрытии скобок после знака минус меняются оба знака.

Умножение комплексных чисел

Раскрываем скобки по распределительному закону и заменяем i^2 на -1.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd\,i^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Пример: $(2+3i)(1-4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 14 - 5i$.

Свойства действий и поле комплексных чисел

Для любых $z, w, v \in \mathbb{C}$ сохраняются привычные законы:

$$z + w = w + z, \qquad zw = wz$$

$$(z + w) + v = z + (w + v), \qquad (zw)v = z(wv)$$

$$z(w + v) = zw + zv$$

Есть нуль 0, единица 1, противоположное число $-z$. У каждого $z \neq 0$ есть обратное число z^{-1}.

Множество $\mathbb{C}$ с этими действиями образует поле. Деление на нуль не определено.

Комплексно сопряжённое число

$$z = a + bi \quad \Longrightarrow \quad \overline{z} = a - bi$$

$$z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = 2bi, \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

Пример: для $z = 2 - 3i$ имеем $\overline{z} = 2 + 3i$ и $z\overline{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 13$.

Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z = a + bi$$

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \iff z = 0, \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad |zw| = |z|\,|w|$$

Пример: $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$

Важно: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а $|a| + |b|$ обычно даёт другое число.

Деление комплексных чисел

Пусть $w = c + di \neq 0$. Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое число $\overline{w} = c - di$.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

Знаменатель $c^2 + d^2 = |w|^2 > 0$. В частности, $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$ для $z \neq 0$.

Пример деления с проверкой

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{3+3i+2i+2i^2}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Проверяем ответ обратным действием:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right)(1-i) = 3+2i$$

Уравнение с комплексным неизвестным

Решим $(1+i)z = 3-i$. Можно разделить на $1+i$ или положить $z = x+yi$, где $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(1+i)(x+yi) = (x-y) + (x+y)i = 3-i$$

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x+y=-1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x=1, \quad y=-2$$

$$z = 1-2i$$

Проверка: $(1+i)(1-2i) = 3-i$.

Квадратные уравнения при $D < 0$

Пусть $Az^2 + Bz + C = 0$, где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. Если $D = B^2 - 4AC < 0$, то:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm i\sqrt{-D}}{2A}$$

Пример: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Здесь $D = 4 - 20 = -16$.

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Корни комплексно сопряжены. Их сумма равна 2, произведение равно 5.

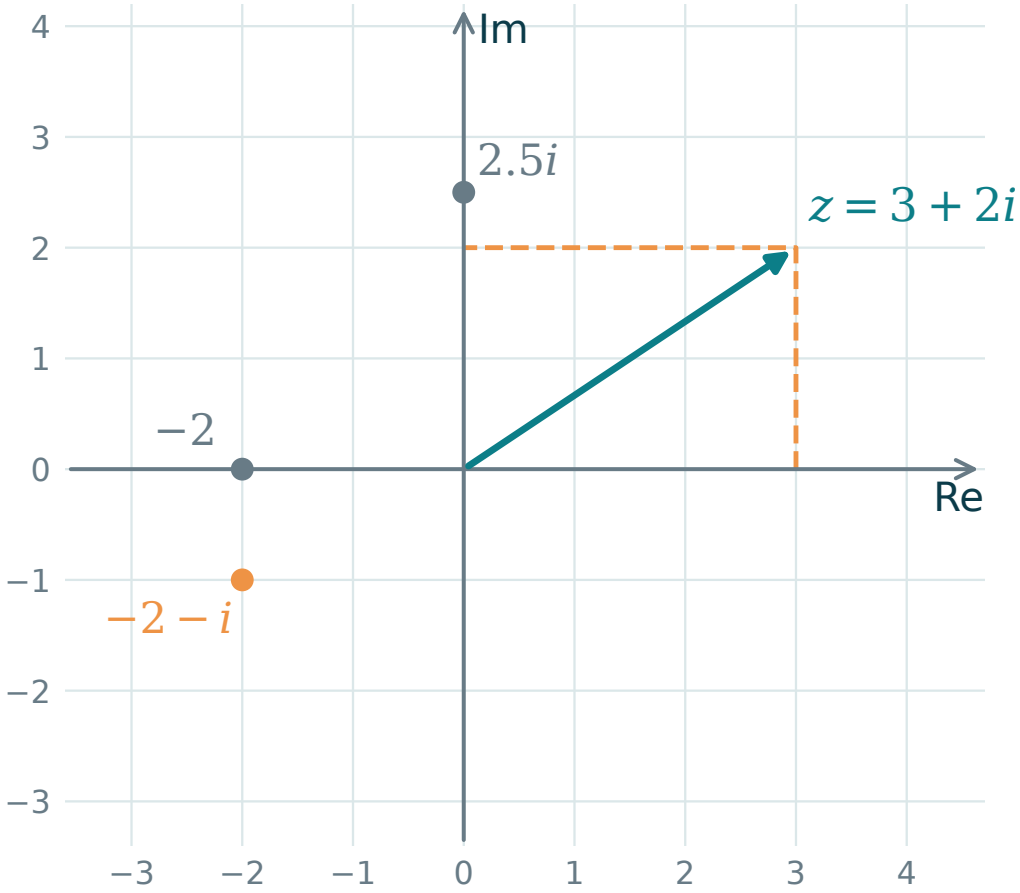
Комплексная плоскость

Числу $z = a + bi$ соответствует точка (a, b) и радиус-вектор из начала координат.

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a, b)$$

Горизонтальная ось соответствует действительной части, вертикальная ось соответствует мнимой части.

Число 0 находится в начале координат.



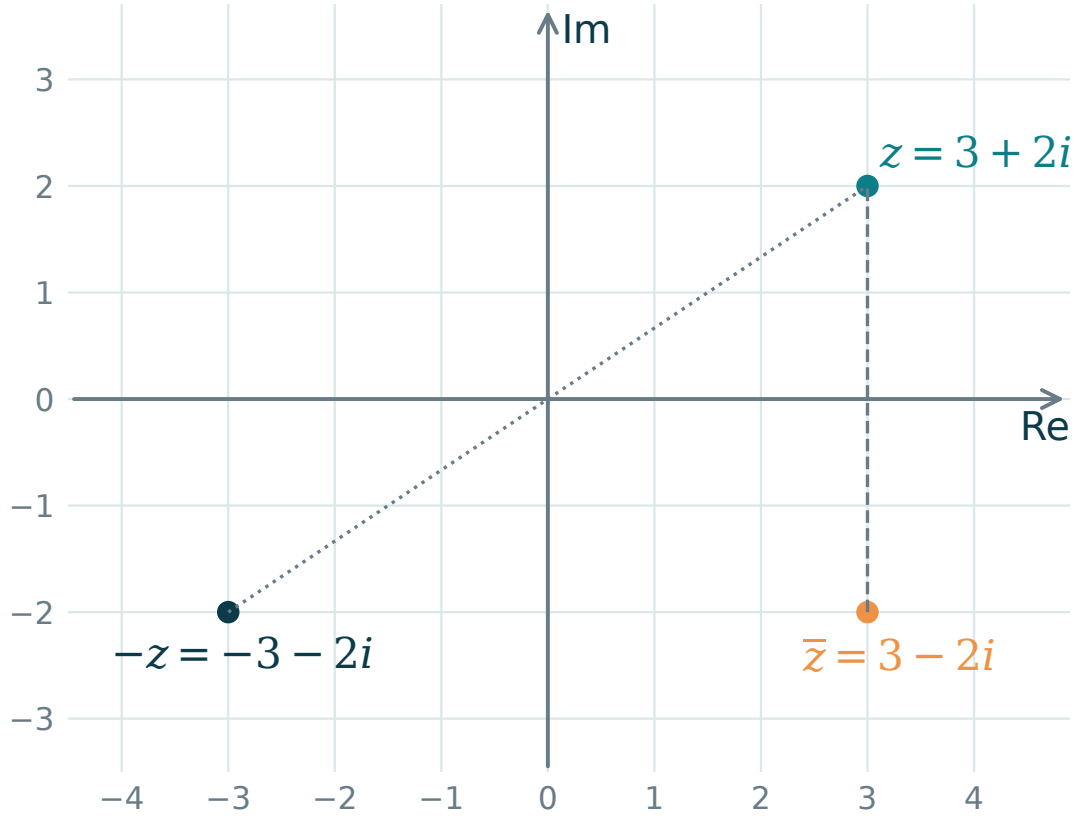
Сопряжение и центральная симметрия

Сопряжение $z \mapsto \overline{z}$

Точка (a, b) переходит в $(a, -b)$. Это отражение относительно действительной оси.

Переход $z \mapsto -z$

Точка (a, b) переходит в $(-a, -b)$. Это центральная симметрия относительно начала координат.



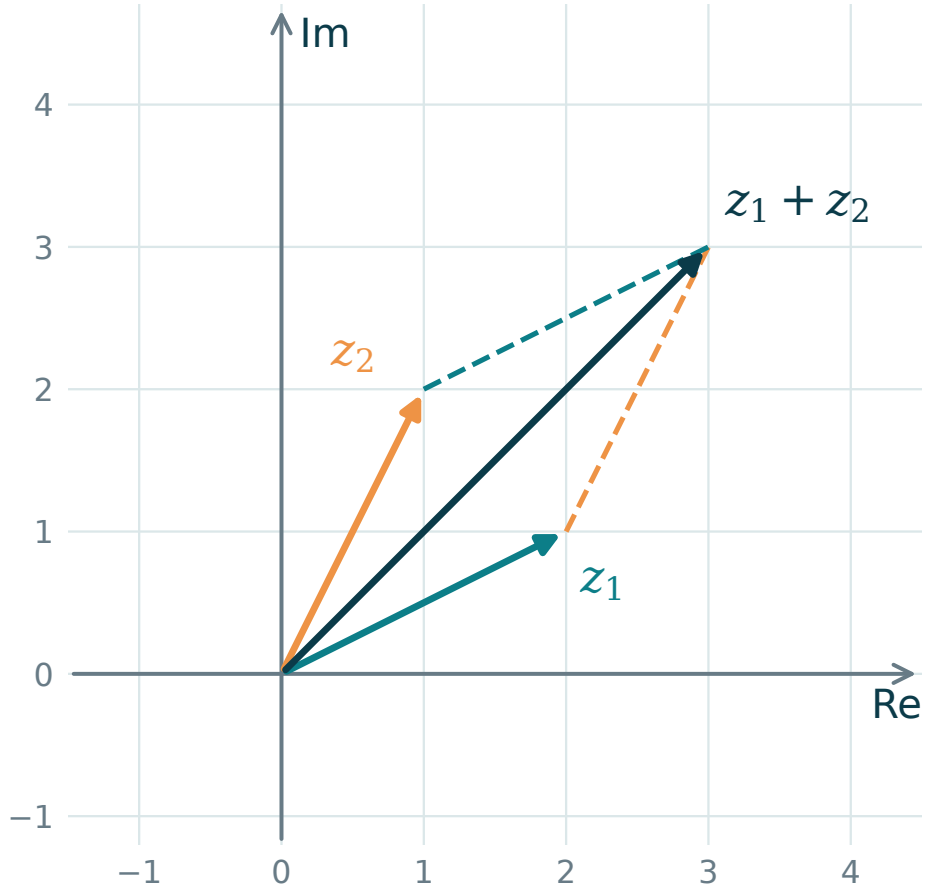
Сложение по правилу параллелограмма

Сложение комплексных чисел совпадает со сложением соответствующих векторов.

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 3i$$

Диагональ параллелограмма задаёт сумму. Разность $z_1 - z_2$ задаёт вектор от точки z_2 к точке z_1.



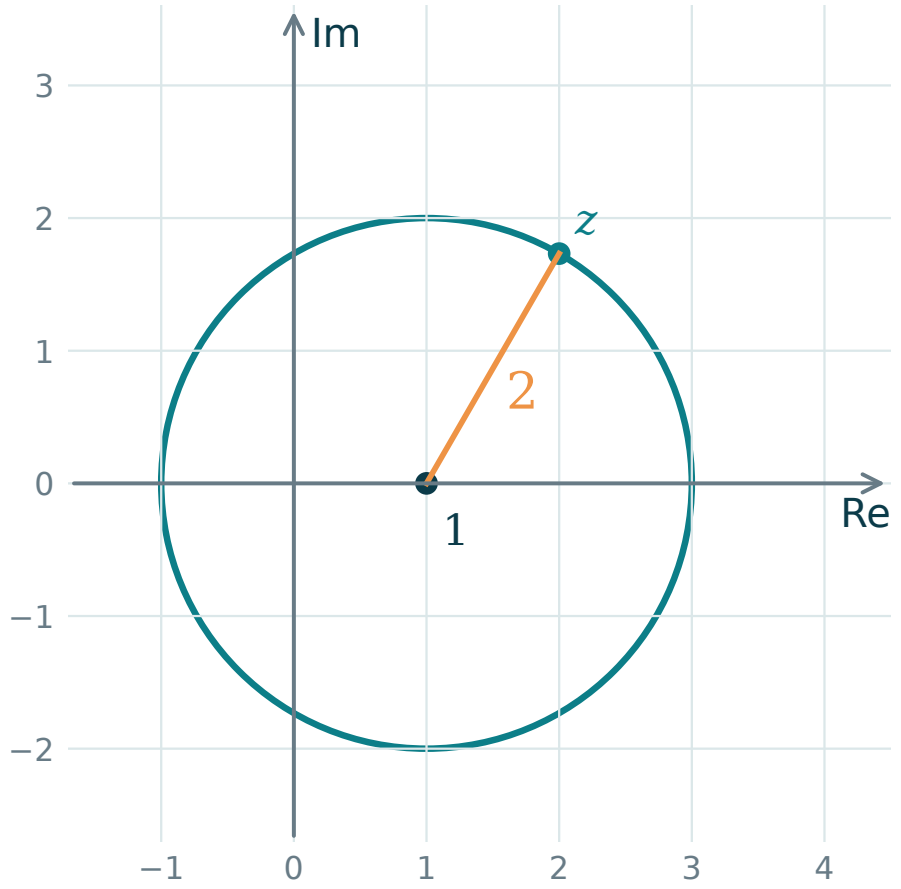
Модуль как длина и расстояние

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Модуль равен расстоянию от точки z до начала координат.

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Пример: $|z - 1| = 2$ задаёт окружность радиуса 2 с центром в точке $(1, 0)$.



Типичные ошибки при вычислениях

Мнимая часть	Для $z = 4 - 7i$ имеем $\operatorname{Im} z = -7$. Множитель i в мнимую часть не входит.
Квадрат мнимой единицы	$(bi)^2 = -b^2$, поскольку $i^2 = -1$.
Сопряжение	У $a + bi$ меняется знак только при bi: $\overline{z} = a - bi$.
Деление	Числитель и знаменатель умножают на одно и то же сопряжённое число.

Самостоятельная работа

1. Найдите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$ и $|z|$ для $z = -3 + 4i$.

2. Вычислите $(2 - i)(3 + 2i)$.

3. Представьте в алгебраической форме $\dfrac{4 + i}{2 - i}$.

4. Решите уравнение $z^2 + 6z + 13 = 0$.

5. Отметьте на плоскости точки $z = 2 - 3i$, $\overline{z}$ и $-z$.

Для каждого вычисления запишите хотя бы один способ проверки.

Ответы к самостоятельной работе

1. $\operatorname{Re} z = -3$, $\operatorname{Im} z = 4$, $\overline{z} = -3 - 4i$, $|z| = 5$.

2. $(2 - i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 8 + i$.

3. $\dfrac{4 + i}{2 - i} = \dfrac{(4 + i)(2 + i)}{5} = \dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}i$.

4. $D = -16$, поэтому $z_{1,2} = -3 \pm 2i$.

5. Получаем точки $(2, -3)$, $(2, 3)$ и $(-2, 3)$.

Основные результаты и контрольные вопросы

$$z = a + bi, \qquad \overline{z} = a - bi, \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} \quad (w \neq 0)$$

1. Почему комплексные числа можно строго определить как пары?
2. Когда два комплексных числа равны?
3. Как сопряжение помогает выполнить деление?
4. Каков геометрический смысл модуля и разности чисел?

Литература и исторические источники

Основная литература

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Дополнительное чтение и история

T. Gantumur. Complex Numbers. McGill University, 2015.

O. Merino. A Short History of Complex Numbers, 2006.

MacTutor: Caspar Wessel. MacTutor: Jean-Robert Argand.

W. R. Hamilton. Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples, 1837.

Названия электронных источников содержат активные ссылки.