Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 12

Произведения векторов

Векторное произведение двух векторов
Смешанное произведение и объёмы

PhD, ассистент-профессор Ергалиев Мади, КазНУ имени аль-Фараби

Модуль 4. Аналитическая геометрия

Цель и план лекции

Цель: вычислять векторное и смешанное произведения и применять их к площадям, объёмам и взаимному расположению векторов.

Два вектора

Ориентация пространства.
Векторное произведение.
Нормаль и площадь.

Три вектора

Смешанное произведение.
Объём параллелепипеда.
Компланарность и объём тетраэдра.

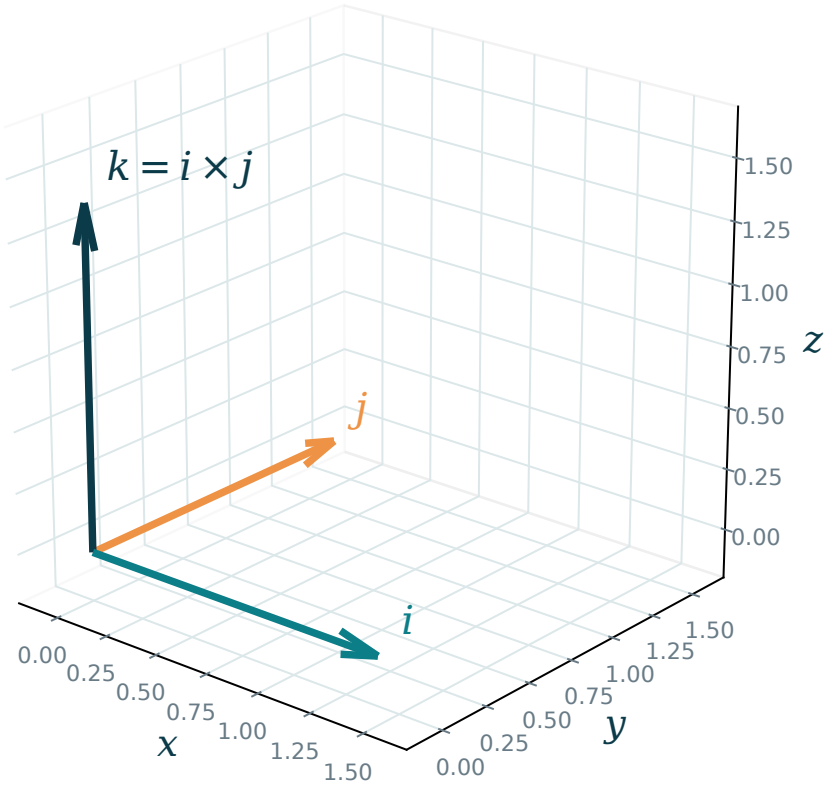
Все координатные формулы этой лекции относятся к правому ортонормированному базису в трёхмерном пространстве.

Правая ориентация пространства

Упорядоченная тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов i, j, k задаёт ориентацию.

В правой системе вращение от i к j по меньшему углу соответствует движению правого винта в направлении k.

Перестановка двух векторов меняет ориентацию.



Определение векторного произведения

Для неколлинеарных a и b вектор $a \times b$ перпендикулярен обоим. Тройка $(a, b, a \times b)$ имеет правую ориентацию.

$$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Длина произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b.

Для коллинеарных векторов, включая нулевые, полагают $a \times b = 0$.

Произведения базисных векторов

$$i \times j = k, \qquad j \times k = i, \qquad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \qquad k \times j = -i, \qquad i \times k = -j$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

Знак определяется порядком множителей. Циклический переход i, j, k сохраняет правую ориентацию.

Запись через определитель

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$. Удобная мнемоническая запись:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Раскрываем по первой строке. Полученные числовые алгебраические дополнения являются коэффициентами при i, j, k.

Это сокращённая запись векторной формулы через числовые миноры.

Координаты векторного произведения

$$(a \times b)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$(a \times b)_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$(a \times b)_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Вторая координата учитывает знак минус при раскрытии определителя. Порядок координат циклический.

Пример вычисления произведения

$$a = (1, 2, 0), \qquad b = (0, 1, 3)$$

$$a \times b = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0)$$

$$a \times b = (6, -3, 1)$$

Результат является вектором. Его координаты можно проверить скалярными произведениями с исходными векторами.

Проверка перпендикулярности результата

$$(6, -3, 1) \cdot (1, 2, 0) = 6 - 6 = 0$$

$$(6, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = -3 + 3 = 0$$

$$|a \times b| = \sqrt{36 + 9 + 1} = \sqrt{46}$$

Обе проверки подтверждают ортогональность. Они не определяют знак нормали: противоположный вектор также перпендикулярен a и b.

Линейность и перестановка множителей

$$a \times b = -(b \times a)$$

$$(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$$

$$a \times (\alpha b + \beta c) = \alpha(a \times b) + \beta(a \times c)$$

Эти свойства следуют из координатной формулы. Отрицание при перестановке отражает смену ориентации.

Векторное произведение неассоциативно

При произведении трёх векторов скобки существенно влияют на результат.

$$i \times (i \times j) = i \times k = -j$$

$$(i \times i) \times j = 0 \times j = 0$$

Следовательно, привычное правило переноса скобок для числового умножения здесь не действует.

Тождество Лагранжа

Квадрат длины векторного произведения можно выразить через длины векторов и скалярное произведение.

$$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a \cdot b)^2$$

Из определений правая часть равна $|a|^2|b|^2(1 - \cos^2\varphi) = |a|^2|b|^2 \sin^2\varphi$.

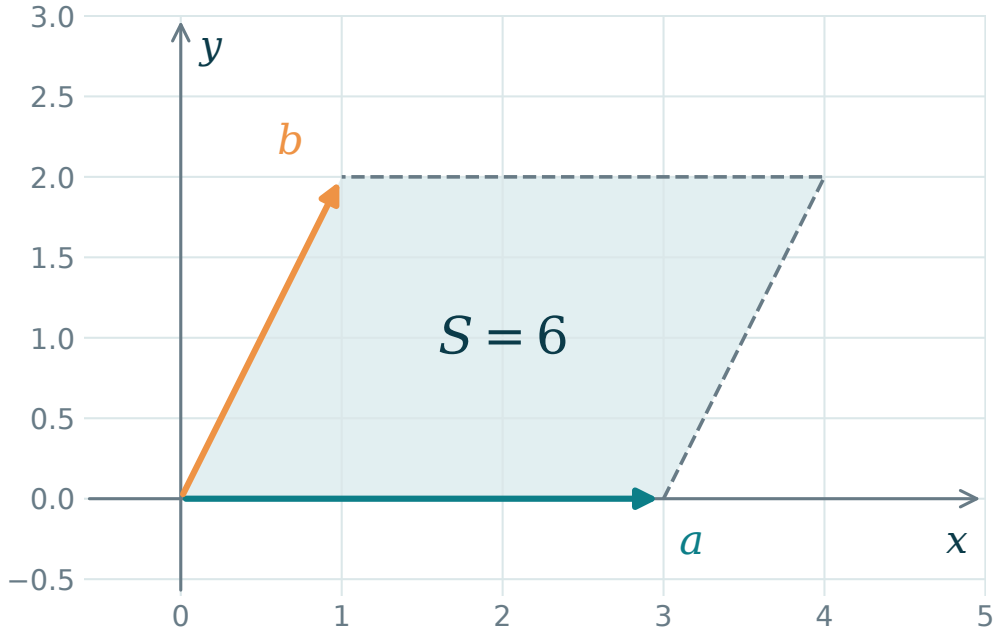
Тождество согласует координатное вычисление и геометрическое определение.

Площадь параллелограмма

$$S = |a \times b|$$

При $a = (3, 0, 0)$ и $b = (1, 2, 0)$ имеем:

$$a \times b = (0, 0, 6), \quad S = 6$$



Площадь не зависит от выбора общего начала векторов.

Площадь треугольника

Для вершин $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ берём два вектора с общим началом A.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Единичная нормаль к плоскости

Если a и b неколлинеарны и лежат в некоторой плоскости, их векторное произведение задаёт направление нормали.

$$n = \pm \frac{a \times b}{|a \times b|}$$

В предыдущем примере $n = \pm(1, -1, 1)/\sqrt{3}$.

Выбор знака соответствует выбору одной из двух сторон плоскости.

Коллинеарность через произведение

Два вектора a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение нулевое.

$$a \times b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \text{ коллинеарны}$$

Если оба вектора ненулевые, равенство означает нулевой синус угла. Поэтому направления совпадают или противоположны.

Координатно получаем одновременное обращение в нуль всех трёх миноров из лекции 10.

Скалярное и векторное произведения

Результат	$a \cdot b$ является числом, а $a \times b$ является вектором.
Перестановка	$a \cdot b = b \cdot a$, но $a \times b = -b \times a$.
Нулевой результат	Для скалярного произведения связан с перпендикулярностью, для векторного связан с коллинеарностью.
Применение	Скалярное произведение даёт углы и проекции, векторное даёт нормали и площади.

Смешанное произведение трёх векторов

Смешанное произведение является скалярным произведением одного вектора на векторное произведение двух других.

$$[a, b, c] = a \cdot (b \times c)$$

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Определитель записан строками a, b, c. Запись этими же столбцами даёт то же значение.

Пример смешанного произведения

$$a = (1, 0, 1), \quad b = (0, 2, 0), \quad c = (1, 1, 3)$$

$$b \times c = (6, 0, -2)$$

$$[a, b, c] = (1, 0, 1) \cdot (6, 0, -2) = 4$$

Положительный знак означает, что тройка a, b, c ориентирована так же, как выбранный правый базис.

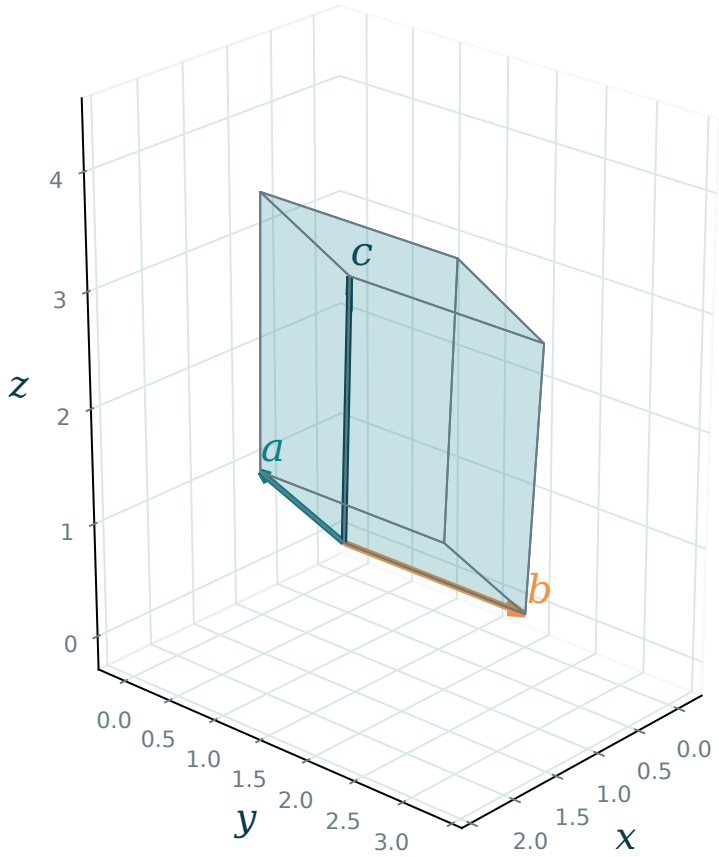
Объём параллелепипеда

$$V = |[a, b, c]|$$

Вектор $b \times c$ имеет длину, равную площади основания. Проекция a на его направление даёт ориентированную высоту.

Модуль произведения равен площади основания, умноженной на высоту.

$$V = |4| = 4$$



Перестановки в смешанном произведении

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$$

$$[a, b, c] = -[b, a, c]$$

Циклическая перестановка сохраняет значение. Перестановка любых двух аргументов меняет знак.

Эти правила следуют из свойств определителя. Если два аргумента совпадают, произведение равно нулю.

Критерий компланарности

Три свободных вектора компланарны, если после переноса к общему началу лежат в одной плоскости.

$$[a, b, c] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b, c \text{ компланарны}$$

Нулевой определитель эквивалентен линейной зависимости трёх векторов. Их линейная оболочка имеет размерность не больше двух.

Критерий включает случаи с нулевыми и коллинеарными векторами.

Пример проверки компланарности

$$a = (1, 0, 1), \quad b = (0, 1, 1), \quad c = (1, 1, 2)$$

$$c = a + b \quad \Longrightarrow \quad [a, b, c] = 0$$

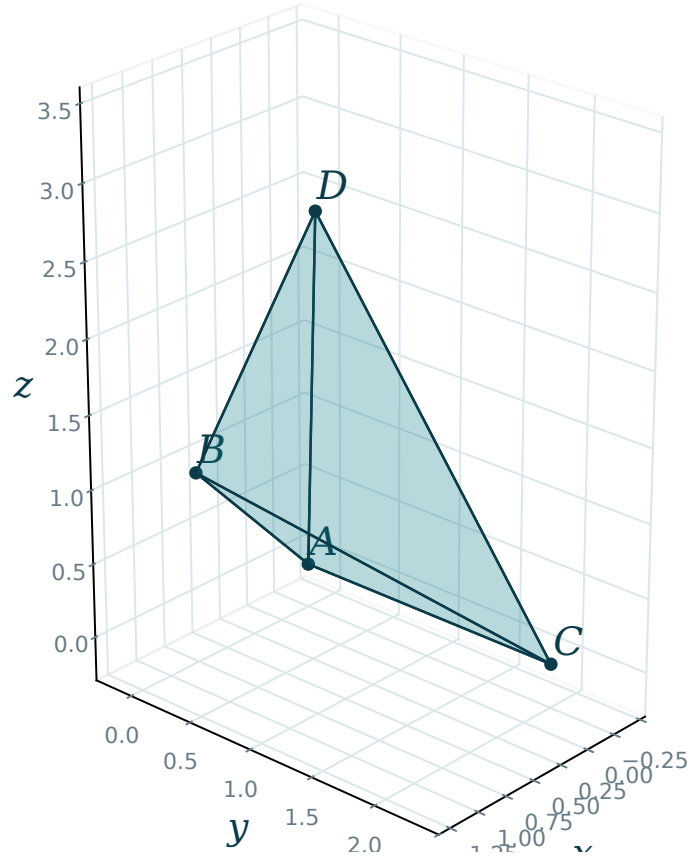
Третий вектор является линейной комбинацией первых двух. Все три лежат в одной плоскости через начало.

При известной линейной связи разворачивать определитель необязательно.

Объём тетраэдра

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$

Пусть $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 0)$, $D = (1, 1, 3)$.



Все три ребра начинаются в одной вершине A. Их смешанное произведение равно 4.

$$V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Высота параллелепипеда

Для $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 2, 0)$, $c = (1, 1, 3)$ найдём высоту к основанию, построенному на a и b.

$$a \times b = (-2, 0, 2), \qquad S = 2\sqrt{2}, \qquad V = 4$$

$$h = \frac{V}{S} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Длина ребра c обычно отличается от высоты. Высота равна длине его ортогональной составляющей.

Двойное векторное произведение

Для упрощения выражения с двумя вложенными векторными произведениями используют отдельное тождество.

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

Результат лежит в линейной оболочке b и c. Справа стоят линейные комбинации с числовыми коэффициентами.

Положение скобок является частью формулы. Проверка возможна по координатам.

Выбор формулы в геометрической задаче

Перпендикуляр	К двум неколлинеарным векторам: $a \times b$.
Площадь	Параллелограмм: $\lvert a \times b \rvert$. Треугольник: половина этого значения.
Объём	Параллелепипед: $\lvert [a, b, c] \rvert$. Тетраэдр: одна шестая.
Компланарность	Нулевое смешанное произведение $[a, b, c] = 0$.

Самостоятельная работа

1. Найдите $a \times b$ для $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$.

2. Найдите площадь параллелограмма на $(2, 0, 0)$ и $(1, 3, 0)$.

3. Найдите площадь треугольника A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,3,0).

4. Вычислите $[a, b, c]$ для $a = (2, 0, 0)$, $b = (0, 3, 0)$, $c = (1, 1, 4)$.

5. Компланарны ли $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ и $(3, 2, 5)$?

Ответы к самостоятельной работе

1. $a \times b = (-1, -1, 1)$.

2. $S = 6$.

3. $S_{\triangle} = 3$.

4. $[a, b, c] = 24$.

5. Да, третий вектор равен сумме утроенного первого и удвоенного второго.

Итоги и контрольные вопросы

1. Как ориентация определяет знак векторного произведения?
2. Почему векторное произведение не является ассоциативным?
3. Как находят площадь и единичную нормаль?
4. Как смешанное произведение связано с определителем?
5. Почему нулевое смешанное произведение означает компланарность?
6. Почему в формуле объёма тетраэдра появляется множитель 1/6?

Литература

Основная литература по аналитической геометрии

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Линейная алгебра и задачи

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.