Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

9-дәріс

Ранг және сызықтық жүйелер

Кронекер-Капелли теоремасы
Іргелі шешімдер жүйесі

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Векторлық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: ранг арқылы үйлесімділікті зерттеу және біртекті, біртекті емес жүйелердің барлық шешімдерін құру.

Ранг және үйлесімділік

Рангті Гаусс әдісімен есептеу.
Базистік жолдар мен бағандар.
Кронекер-Капелли теоремасы.

Шешімдер кеңістігі

Еркін белгісіздер саны.
Іргелі шешімдер жүйесі.
Дербес және жалпы шешімдер.

Теория R және C өрістері үстінде дұрыс. Сандық мысалдарда нақты белгісіздер мен параметрлерді қолданамыз.

Ранг және базистік минор

Матрицаның рангі нөлден өзге минордың ең үлкен ретіне тең. Реті рангке тең нөлдік емес минор базистік минор деп аталады.

$$r = \operatorname{rank} A, \qquad 0 \le r \le \min(m, n)$$

Ранг 0-ге тең болса, матрица нөлдік болады. Бұл жағдайда оң ретті нөлдік емес базистік минор жоқ.

Рангтің инварианттылығы

Жолдарды алмастыру, жолды нөлден өзге санға көбейту және басқа жолдың еселігін қосу рангті сақтайды. Бағандар үшін де солай.

Минорлар арқылы негіздеу: түрлендіруден кейінгі әр минор бастапқы сол ретті минорлардың сызықтық комбинациясы ретінде өрнектеледі.

Сондықтан берілген ретті барлық минорлардың бір мезгілде нөл болуы сақталады. Түрлендірудің қайтымдылығынан рангтердің теңдігі шығады.

Сатылы матрицаның рангі

Сатылы матрицада r нөлдік емес жол болсын. Осы жолдар мен жетекші бағандардан алынған минор үшбұрышты және диагоналі нөлдік емес болады.

Жоғары ретті минорлардың бәрі нөлге тең, себебі олардың құрамына нөлдік жол міндетті түрде кіреді.

$$\operatorname{rank} A = \text{жоюдан кейінгі жетекші элементтер саны}$$

Бұл минорлар арқылы берілген анықтаманы Гаусс әдісімен байланыстырады.

Рангті Гаусс әдісімен есептеуге мысал

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ орындаймыз, содан кейін екінші және үшінші жолдарды алмастырамыз. Екі жетекші элемент алынды.

$$\operatorname{rank} A = 2$$

Бастапқы бағандардың базисін таңдау

Алдыңғы мысалда жетекші элементтер бірінші және екінші бағандарда жатыр. Бағандар базисін бастапқы A матрицасынан аламыз:

$$c_1 = (1, 2, 0)^{\mathsf{T}}, \qquad c_2 = (2, 4, 1)^{\mathsf{T}}$$

$$c_3 = (3, 6, 1)^{\mathsf{T}} = c_1 + c_2$$

Жол түрлендірулері бағандарды өзгертеді, бірақ олардың тәуелділік байланыстарын сақтайды. Табылған нөмірлердегі бағандарды бастапқы матрицадан аламыз.

Жолдар мен бағандар рангтерінің теңдігі

Жолдардың элементар түрлендірулері олардың сызықтық қабықшасын сақтайды. Сатылы матрицаның нөлдік емес жолдары тәуелсіз, сондықтан жолдар рангі r-ге тең.

Жол түрлендірулері бағандардың тәуелділік байланыстарын да сақтайды. Сатылы матрицаның жетекші бағандары оның бағандарының базисін құрайды, олардың саны r.

$$\text{Жолдар рангі} = \text{бағандар рангі} = \operatorname{rank} A$$

$$\operatorname{rank}(A^{\mathsf{T}}) = \operatorname{rank} A$$

Базистік минор туралы теорема

r-ретті базистік минор арқылы өтетін жолдар мен бағандар сәйкес жолдар және бағандар жүйелерінің базистерін құрайды.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Мұнда 1, 3-жолдар мен 1, 2-бағандарды алуға болады. Нөлдік емес минордан олардың тәуелсіздігі шығады, ал саны рангке тең.

Ранг үшін пайдалы теңсіздіктер

$$\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$$

$$\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

Формулалардағы өлшемдер үйлеседі. AB бағандары A бағандарының комбинациялары болады. Көбейтіндінің екінші бағасы үшін транспонирлеу қолданылады.

A + B бағандары A мен B бағандарының қабықшаларының қосындысында жатады. Қосынды үшін теңсіздік осыдан түсіндіріледі.

Кронекер-Капелли теоремасы

$AX = b$ жүйесі берілсін, мұндағы A матрицасында m жол және n баған бар. Кеңейтілген матрицаны $[A \mid b]$ деп белгілейміз.

$$AX = b \text{ үйлесімді} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A \mid b]$$

Рангтердің теңдігі шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарты болады.

Үйлесімділік теоремасын дәлелдеу

$$AX = b \quad \Longleftrightarrow \quad x_1c_1 + \cdots + x_nc_n = b$$

Жүйенің үйлесімді болуы b векторының A бағандарының қабықшасында жатуына мәндес. Мұндай бағанды қосу рангті өзгертпейді.

b қабықшаға тиісті болмаса, ол бір тәуелсіз вектор қосады. Кеңейтілген матрицаның рангі 1-ге артады.

Бұл теореманың екі бағытын да дәлелдейді.

Рангтерге байланысты шешімдер саны

$\operatorname{rank}[A \mid b] > \operatorname{rank} A$	Шешімі жоқ.
$\operatorname{rank}[A \mid b] = \operatorname{rank} A = n$	Жалғыз шешім.
$\operatorname{rank}[A \mid b] = \operatorname{rank} A = r < n$	Шешімі шексіз көп; еркін белгісіздер саны $n - r$.

Тек теңдеулер саны бойынша үйлесімділік пен жалғыздықты анықтауға болмайды.

Үйлесімді жүйеге мысал

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ орындалып, екінші және үшінші жолдар алмастырылды. Негізгі және кеңейтілген матрицалардың рангтері 2-ге тең.

Белгісіздер саны 3, жетекші элементтер саны 2. Демек, жүйе үйлесімді және бір еркін белгісізі бар.

Үйлесімді жүйенің жалпы шешімі

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \qquad x_3 = t, \qquad x_2 = 2 - t$$

$$x_1 = 3 - 2(2 - t) + t = -1 + 3t$$

$$X = (-1, 2, 0)^{\mathsf{T}} + t(3, -1, 1)^{\mathsf{T}}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Үйлесімсіз жүйеге мысал

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Коэффициенттер матрицасы өзгермеді және рангі 2-ге тең. Кеңейтілген матрицаның соңғы жолы қосымша жетекші элемент береді.

$$\operatorname{rank} A = 2, \quad \operatorname{rank}[A \mid b] = 3 \quad \Longrightarrow \quad \text{шешімі жоқ}$$

Біртекті жүйе шешімдерінің кеңістігі

$$\ker A = \{X \in \mathbb{F}^n : AX = 0\}$$

Нөл $\ker A$ жиынына тиісті. Егер $Au = 0$ және $Av = 0$ болса, кез келген скалярлар үшін:

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av = 0$$

Ішкі кеңістік критерийі бойынша $\ker A$ жиыны $\mathbb{F}^n$ кеңістігінің векторлық ішкі кеңістігі болады. Ол А матрицасының ядросы деп аталады.

Біртекті шешімдер кеңістігінің өлшемділігі

A матрицасының n бағаны, рангі r болсын. Жоюдан кейін n - r белгісіз еркін болып қалады.

$$\dim \ker A = n - \operatorname{rank} A = n - r$$

Еркін белгісіздер мәндерінің әр жиынтығы бір ғана шешімді анықтайды. Еркін мәндерді бір-біріне тәуелсіз таңдауға болады.

Параметрлер саны шешімдер кеңістігінің өлшемділігімен сәйкес келеді.

Іргелі шешімдер жүйесі

$AX = 0$ біртекті жүйесінің іргелі шешімдер жүйесі (ІШЖ) $\ker A$ кеңістігінің базисі болады.

$$X = c_1 u_1 + \cdots + c_{n-r} u_{n-r}$$

ІШЖ векторлары шешімдер болады, сызықтық тәуелсіз және барлық біртекті шешімдерді тудырады. Олардың саны n - r-ге тең.

ІШЖ әртүрлі болуы мүмкін, бірақ берілген матрица үшін векторлар саны өзгермейді.

ІШЖ құру алгоритмі

1. Сатылы түр — Біртекті жүйені сатылы түрге келтіру.
2. Еркін белгісіздер — Оларды таңдап, жетекші белгісіздерді солар арқылы өрнектеу.
3. Бірлік жиынтықтар — Кезекпен бір еркін белгісізге 1, қалғандарына 0 мәнін беру.
4. Шешім векторлары — Әр жиынтық үшін барлық жетекші белгісіздерді анықтау.

ІШЖ мысалы: төрт белгісіз

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Үшінші жол алғашқы екі жолдың қосындысына тең. Жоюдан кейін екі тәуелсіз теңдеу қалады.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

ІШЖ мысалы: еркін белгісіздер

$x_3 = s$, $x_4 = t$ деп аламыз. Екінші теңдеуден:

$$x_2 = -s + 2t$$

Бұл өрнекті бірінші теңдеуге қоямыз:

$$x_1 = -2(-s + 2t) + s - t = 3s - 5t$$

Жалпы жиынтық: $X = (3s - 5t, -s + 2t, s, t)^\mathsf{T}$.

ІШЖ мысалы: екі базистік шешім

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Бірінші вектор $(s,t) = (1,0)$ кезінде, екіншісі $(s,t) = (0,1)$ кезінде алынған. Қою арқылы $Au_1 = Au_2 = 0$ аламыз.

$$X = su_1 + tu_2, \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Іргелі шешімдер жүйесін тексеру

$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0$ болса, үшінші координатадан $\alpha = 0$, төртіншісінен $\beta = 0$ шығады. Сондықтан векторлар тәуелсіз.

Еркін мәндері s және t болатын кез келген шешім $su_1 + tu_2$ түрінде жазылады. Демек, осы екі вектор бүкіл ядроны тудырады.

$\{u_1, u_2\}$ жүйесі $\ker A$ кеңістігінің базисі, $\dim \ker A = 4 - 2 = 2$

Біртекті емес жүйенің жалпы шешімі

X_p үйлесімді $AX = b$ жүйесінің бір дербес шешімі болсын. X басқа шешімі болса:

$$A(X - X_p) = b - b = 0$$

$$X = X_p + X_h, \qquad X_h \in \ker A$$

Керісінше, дербес шешім мен кез келген біртекті шешімнің қосындысы бастапқы жүйені қанағаттандырады.

Біртекті емес жүйеге мысал

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad X_p = (-3, 2, 0, 0)^{\mathsf{T}}$$

ІШЖ мысалындағы матрица үшін дербес шешім тікелей тексеріледі: алғашқы екі жол 1 мен 2, үшінші жол 3 мәнін береді.

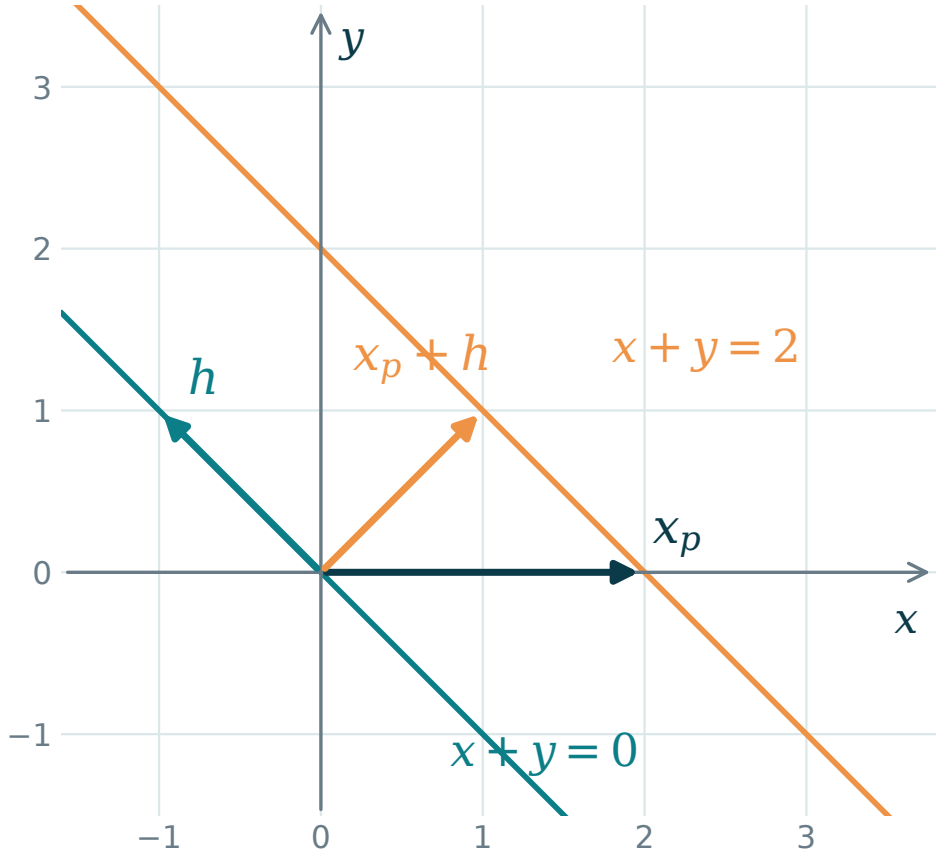
$$X = (-3, 2, 0, 0)^{\mathsf{T}} + su_1 + tu_2, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Біртекті емес шешімдердің геометриясы

Біртекті шешімдер координаталар басынан өтетін ішкі кеңістік құрайды.

Біртекті емес шешімдер осы ішкі кеңістікті дербес шешім векторына көшіру арқылы алынады.

Суреттегі x + y = 2 түзуі x + y = 0 түзуін көшіру арқылы алынған.



Толық ранг және бос ІШЖ

rank $A = n$ болса, еркін белгісіздер жоқ және ker $A = \{0\}$.

$$\dim \ker A = 0, \qquad \text{ІШЖ бос жүйе болады}$$

Нөлдік вектор базиске кірмейді: ол бар жүйе тәуелді. Бұл жағдайда жалғыз біртекті шешім нөлге тең.

Матрицасы дәл осындай біртекті емес жүйе үйлесімді болса, оның шешімі жалғыз.

Жиі кездесетін қателер

Әртүрлі рангтер	Үйлесімділікті зерттеу үшін A рангі бүкіл кеңейтілген матрицаның рангімен салыстырылады.
Бағандар базисі	Сатылы түрден алынған нөмірлер бойынша бастапқы матрицаның жетекші бағандары алынады.
Еркін мәндер	ІШЖ құрғанда әр еркін белгісізге бір бірлік жиынтық қолданылады.
Біртекті емес шешім	ІШЖ векторларының сызықтық комбинациясына дербес шешімді қосу қажет.

Өзіндік жұмыс

1. Үйлесімділігін зерттеңіз: $x + y = 1$, $2x + 2y = 3$. Екі рангті де көрсетіңіз.

2. ІШЖ құрыңыз: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Жалпы шешімін табыңыз: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$.

4. Өлшемі 3×5 матрицаның рангі 2-ге тең. Ядросының өлшемділігі қандай және ІШЖ-де қанша вектор бар?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank}[A \mid b] = 2$. Шешімі жоқ.

2. $u_1 = (-1, 1, 0)^\mathsf{T}$, $u_2 = (-1, 0, 1)^\mathsf{T}$ деп алуға болады.

3. $X = (2, 0, 0)^\mathsf{T} + su_1 + tu_2$, мұндағы $s, t \in \mathbb{R}$.

4. $\dim \ker A = 5 - 2 = 3$. ІШЖ үш вектордан тұрады.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Элементар түрлендірулер рангті неліктен сақтайды?
2. Жетекші бағандар бастапқы бағандардың базисімен қалай байланысады?
3. Кронекер-Капелли теоремасының геометриялық мағынасы қандай?
4. Ядроның өлшемділігі неліктен n - r шамасына тең?
5. Еркін мәндердің бірлік жиынтықтары ІШЖ-ні неліктен береді?
6. Біртекті емес жалпы шешім біртекті жалпы шешімнен несімен ерекшеленеді?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық курс атауында белсенді сілтеме берілген.