Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

15-дәріс

Екінші ретті беттер

Эллипсоидтар, гиперболоидтар және конустар
Параболоидтар мен цилиндрлер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

4-модуль. Аналитикалық геометрия

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: негізгі екінші ретті беттерді тану, олардың пішінін канондық теңдеулер мен жазық қималар арқылы түсіндіру.

Негізгі беттер

Эллипсоид және гиперболоидтар.
Конус және параболоидтар.
Екінші ретті цилиндрлер.

Зерттеу әдістері

Жазықтықтармен қию.
Симметрия және осьтердің орналасуы.
Көшіру және квадраттарды бөліп алу.

Нақты үшөлшемді кеңістік пен тікбұрышты декарттық координаталарды қолданамыз.

Квадриканың жалпы теңдеуі

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

Квадраттық коэффициенттердің кемінде біреуі нөлдік емес. Квадраттық бөлікті нақты симметриялы Q матрицасы арқылы жазған ыңғайлы.

$$r^{\mathsf{T}} Q r + 2p^{\mathsf{T}} r + J = 0, \qquad Q = Q^{\mathsf{T}} \neq 0$$

Бетті қималар арқылы зерттеу

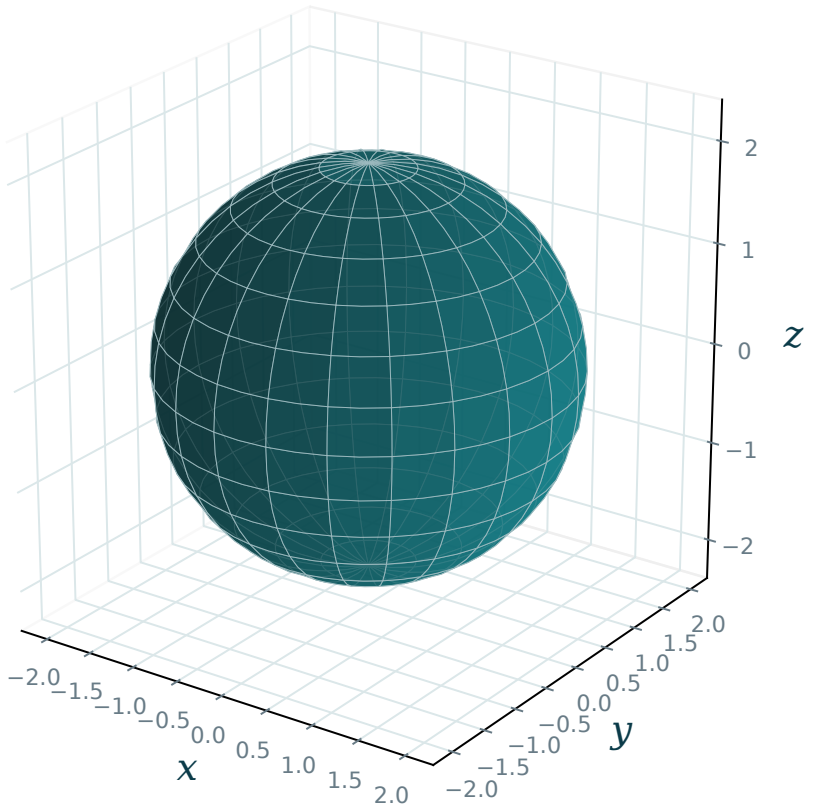
Көлденең қималар	$z = h$ мәнін қою Oxy-ке параллель жазықтықтағы қисықты береді.
Тік қималар	$x = h$ немесе $y = h$ мәндерін қою беттің кескінін анықтайды.
Симметрия	Координатаның тек жұп дәрежелермен кіруі сәйкес жазықтыққа қатысты симметрияны көрсетеді.
Нүктелердің орналасуы	Таңбалар мен квадраттар қосындылары арқылы мүмкін деңгейлер мен азғындалулар анықталады.

Сфера

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=R^2$$

Центрі $C=(h,k,l)$, радиусы $R>0$. Сфера центрден тұрақты арақашықтықта жатқан нүктелер бетін құрайды.

Суретте $x^2+y^2+z^2=4$. Центр арқылы өтетін барлық қималар радиусы 2 болатын шеңберлер.



Эллипсоидтың канондық теңдеуі

Эллипсоидтың үш оң жарты осі a, b, c бар, центрі координаталар басында орналасқан.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a, b, c > 0$$

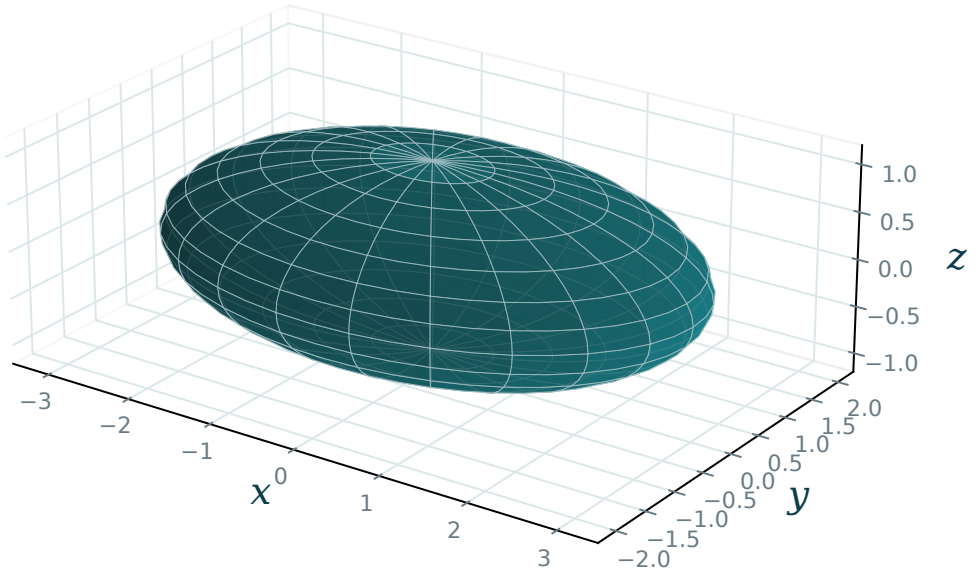
Бет осьтерді $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ және $(0, 0, \pm c)$ нүктелерінде қияды.

Эллипсоид тұйық және шенелген. a=b=c кезінде сфера алынады.

Эллипсоидтың жарты осьтерінің ұзындықтары

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

Жарты осьтері 3, 2 және 1-ге тең. Бас осьтерінің ұзындықтары 6, 4 және 2-ге тең.



Осьтер бойындағы әртүрлі масштабтар созылыңқы және жалпақ пішінді түсіндіреді.

Эллипсоидтың параллель қималары

$$z = h \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

$|h| < c$ кезінде эллипс алынады. Оның жарты осьтері $a\sqrt{1 - h^2/c^2}$ және $b\sqrt{1 - h^2/c^2}$ шамаларына тең.

$|h| = c$ кезінде қима бір нүктеден тұрады. $|h| > c$ кезінде нақты нүктелері жоқ.

x=const және y=const жазықтықтарымен қималар да осылай зерттеледі.

Центрі көшірілген эллипсоид

Координаталар басын көшіру координаталарды олардың центр координаталарымен айырмаларына ауыстырады.

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}+(z-3)^2=1$$

Центрі $C=(1,-2,3)$. Жарты осьтері 3, 2 және 1-ге тең. Бас осьтері координаталық осьтерге параллель.

Көшірудің өзі беттің өлшемдерін өзгертпейді.

Біркуысты гиперболоид

Оң жағы 1-ге тең болғанда екі оң және бір теріс квадрат біркуысты гиперболоидты береді.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

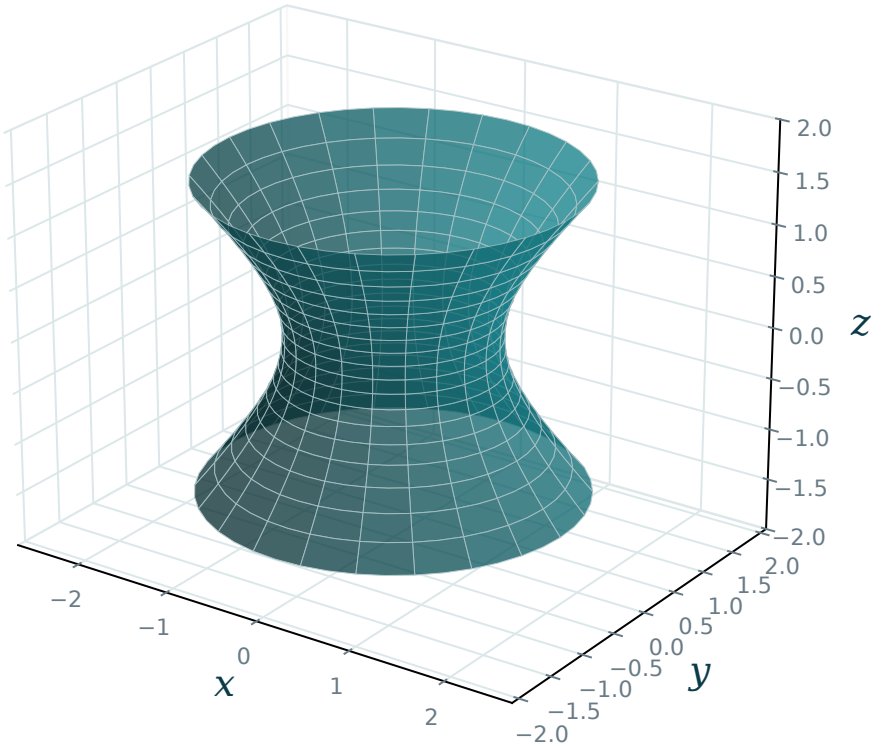
Бет байланысты. Осі теріс квадратты айнымалыға сәйкес келеді, мұнда ол Oz.

a, b, c параметрлері оң. Бет шенелмеген.

Бірқуысты гиперболоидтың пішіні

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

z=0 кезінде радиусы 1 болатын шеңбер алынады. |z| өскен сайын көлденең қималардың радиусы өседі.



Суретте беттің бір бөлігі көрсетілген. Ол Oz осінің екі бағытымен де жалғасады.

Біркуысты гиперболоидтың қималары

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

Кез келген h үшін эллипс алынады. Ең тар көлденең қима z=0 жазықтығында орналасқан.

$$x = 0: \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Тік координаталық қималар гиперболалар болады.

Екіқуысты гиперболоид

Оң жағы 1-ге тең болғанда бір оң және екі теріс квадрат екіқуысты гиперболоидты береді.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Беттің екі бөлек қуысы бар. Теңдеуден $|z| \geq c$ шығады. Төбелері: $(0, 0, \pm c)$.

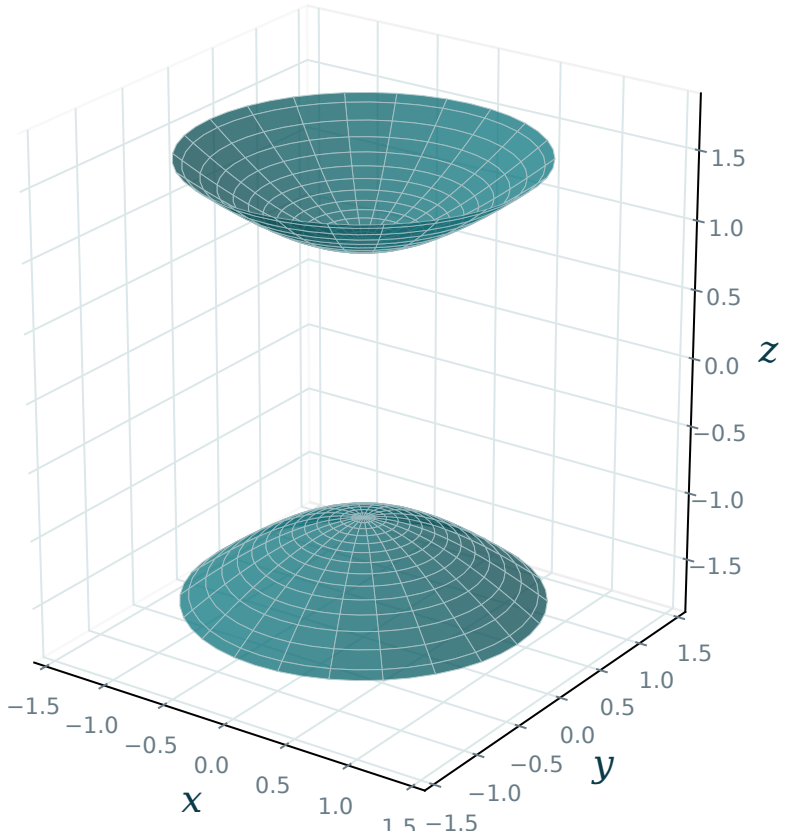
Осі оң квадратты айнымалыға сәйкес келеді, мұнда ол Oz.

Гиперболоидтың екі қуысы

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

$-1 < z < 1$ кезінде бет нүктелері жоқ.
Екі қуыс (0,0,1) және (0,0,-1) төбелерінен басталады.

Әр қуыс сәйкес төбеден алыстаған сайын кеңейеді.



Екіқуысты гиперболоидтың қималары

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

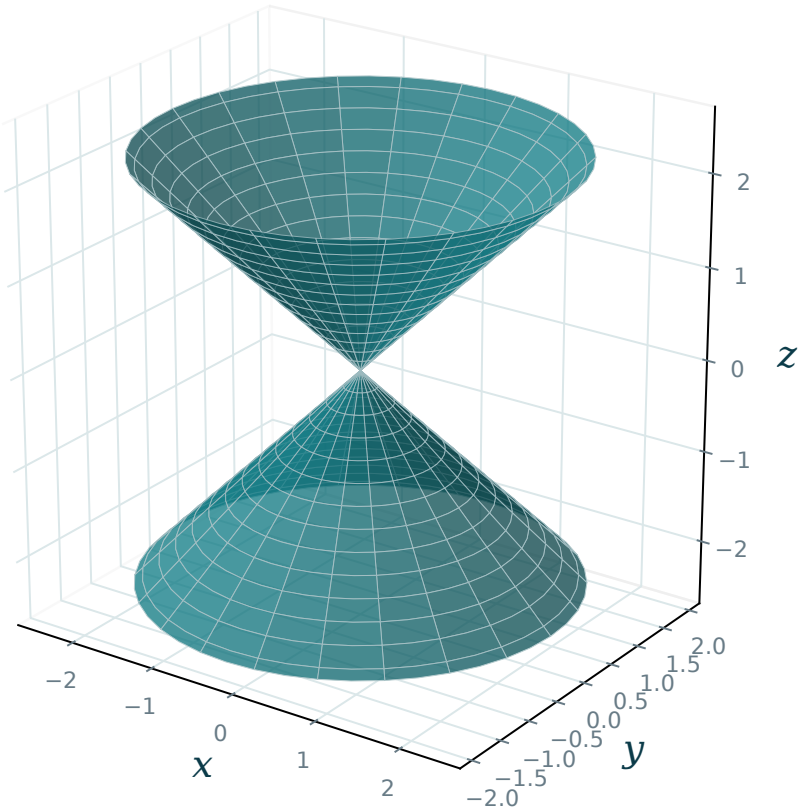
$|h| > c$ кезінде эллипстер алынады. $|h| = c$ кезінде төбелер қалады. $|h| < c$ кезінде қима бос.

Oz осі арқылы өтетін жазықтықтармен қималар — тармақтары жоғары және төмен бағытталған гиперболалар.

Екінші ретті конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Төбесі координаталар басында орналасқан. Конус төбесінде қосылатын екі бөліктен тұрады.



Суретте $x^2 + y^2 = z^2$. Төбе мен бет нүктесі арқылы өтетін әр түзу толығымен конуста жатады.

Конустың қималары мен жасаушылары

$$z = h: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

h нөлдік емес болса, эллипс, h=0 болса, бір нүкте алынады. Oz осі арқылы өтетін жазықтық конусты екі жасаушы бойымен қияды.

$$F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$$

Теңдеудің біртектілігі төбе арқылы өтетін түзу сызықты жасаушыларды түсіндіреді.

Эллипстік параболоид

Бірдей оң таңбалы квадраттар бір координатаны сызықтық түрде өрнектейді.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad a, b > 0$$

Төбесі координаталар басында, осі Oz бойымен бағытталған. z>0 кезіндегі көлденең қималар эллипстер болады.

Оң жақтың алдындағы таңбаны ауыстырғанда параболоид төмен қарай ашылады.

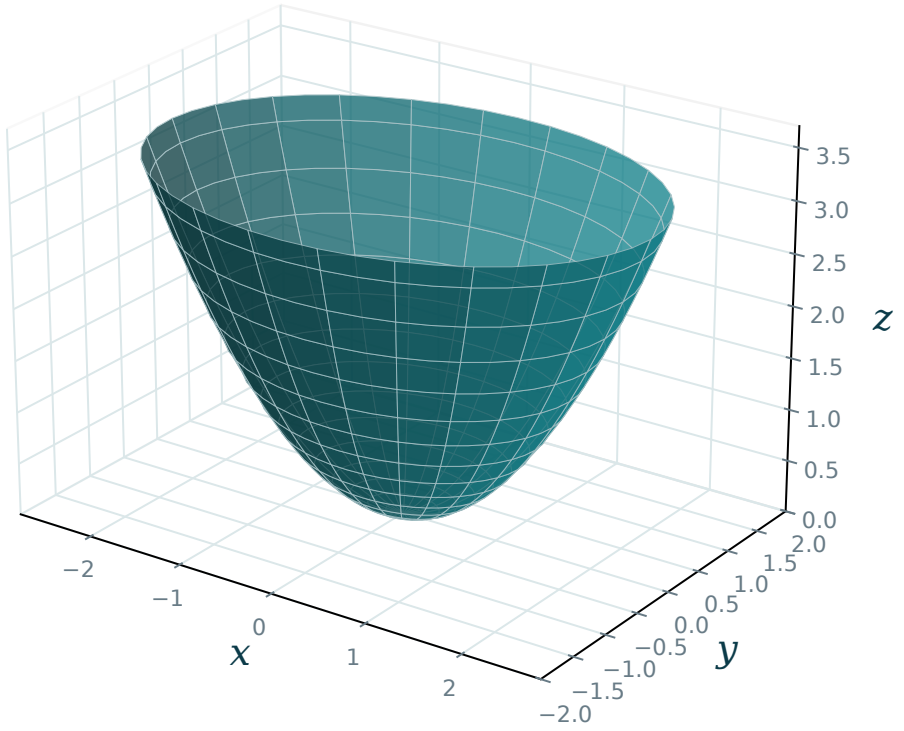
Эллипстік параболоидтың қималары

$$z = \frac{x^2}{2} + y^2$$

$z = h > 0$ кезінде эллипс алынады.

$z = 0$ кезінде төбесі қалады.

$z < 0$ кезінде қима бос.



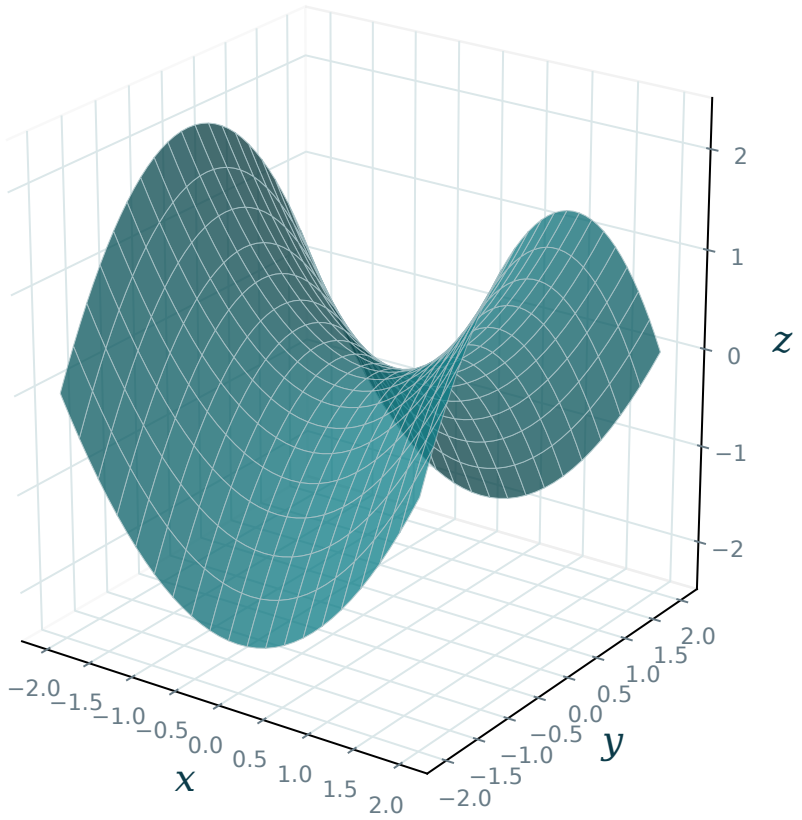
Ось арқылы өтетін тік жазықтықтар параболаларды береді.

Гиперболалық параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Квадраттардың таңбалары әртүрлі. Бет ершік пішінді және координаталар басы арқылы өтеді.

Суретте $z = (x^2 - y^2)/2$. z мәндері оң да, теріс те болады.



Ершік пішінді жазық қималармен түсіндіру

$$y = 0: \ z = \frac{x^2}{a^2}, \qquad x = 0: \ z = -\frac{y^2}{b^2}$$

Екі тік парабола қарама-қарсы бағытталған. Сондықтан координаталар басы биіктігі ең үлкен де, ең кіші де нүкте емес.

$$z = 0: \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$

Нөлдік емес деңгейдегі көлденең қималар гиперболалар болады.

Цилиндрлік бет

Теңдеуде z болмаса, бет өзінің кез келген нүктесімен бірге Oz-ке параллель тұтас түзуді қамтиды.

$$F(x, y) = 0, \qquad z \in \mathbb{R}$$

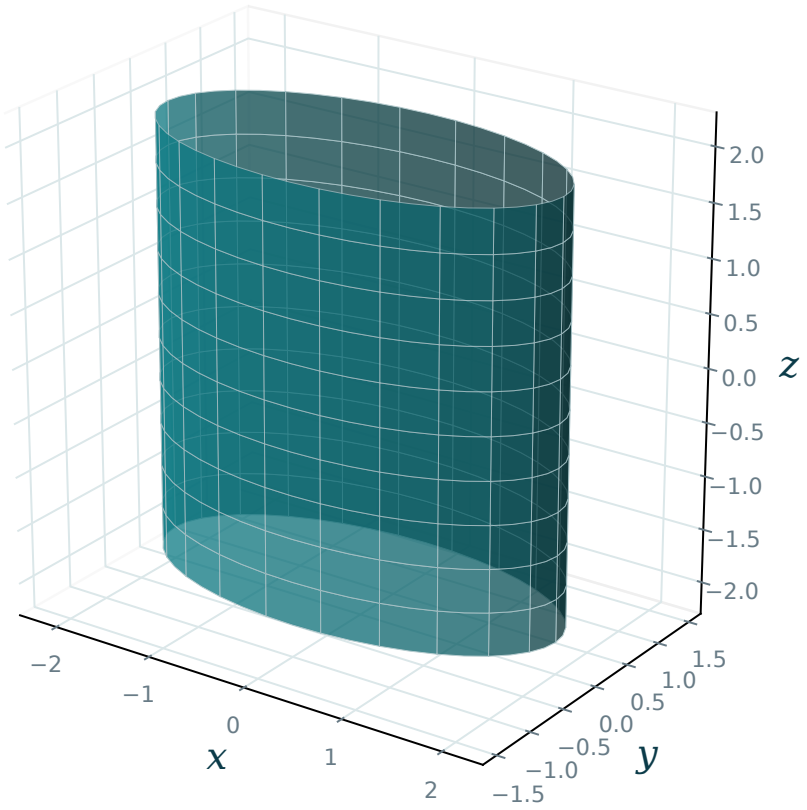
Oxy жазықтығындағы F(x,y)=0 қисығы — бағыттауыш. Oz бойындағы параллель түзулер жасаушылар деп аталады.

«Цилиндр» атауы міндетті түрде дөңгелек бетті білдірмейді.

Эллипстік цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Кез келген көлденең қима бірдей эллипс болады. z координатасы барлық нақты мәндерді қабылдайды.

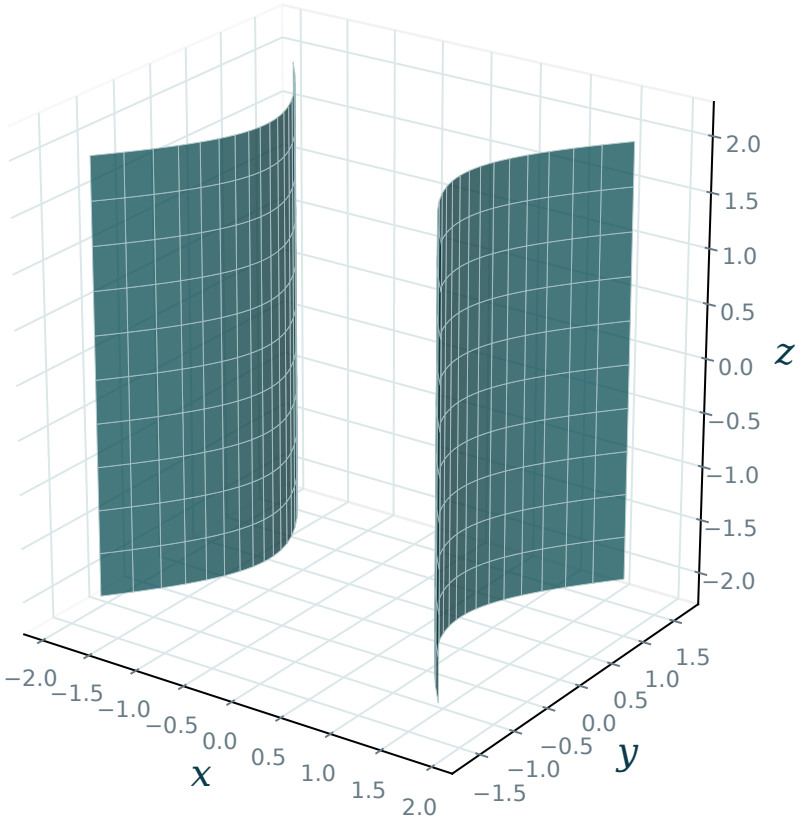


Суретте $x^2/4 + y^2 = 1$. Бұл беттің қақпақтары мен шекаралық шеңберлері жоқ.

Гиперболалық цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Бағыттауышы гипербола болады. Оның әр нүктесі Oz-ке параллель түзуді тудырады.



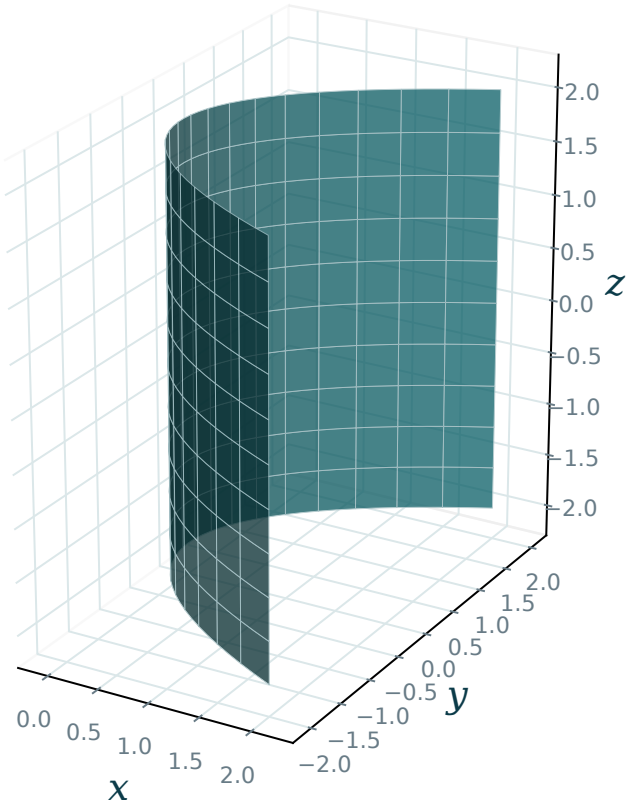
Суретте $x^2 - y^2 = 1$. Бағыттауыштың екі тармағы беттің екі бөлек бөлігін құрайды.

Параболалық цилиндр

$$y^2 = 2px, \qquad p \neq 0$$

Бағыттауышы парабола, ал z координатасы еркін. z=h жазықтығында сол параболаны аламыз.

Суретте $y^2 = 2x$. Беттің жалғыз төбесі жоқ: (0,0,z) нүктелері тұтас түзу құрайды.



Цилиндр осі және координаталарды көшіру

$$\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(z+2)^2}{9}=1$$

Теңдеуде x жоқ. Сондықтан жасаушылар Ox-ке параллель. Эллипстік қималардың центрлері y=1, z=-2 түзуінде жатады.

Жоқ координатаның атауы осы жүйедегі жасаушылар бағытын анықтайды. Көшіру орнын өзгертеді, пішінін сақтайды.

Гиперболоидтар мен конус: оң жақтың рөлі

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Бірқуысты гиперболоид. Кез келген z үшін көлденең қима бар.

$x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Екіқуысты гиперболоид. -1-ге көбейткеннен кейін $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ аламыз.

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Конус. Гиперболоидтардың екі түрінің арасында төбесі бар біртекті теңдеу орналасады.

Азғындалған беттер

$x^2 + y^2 = 0$ — Oz түзуі: x=y=0, ал z кез келген.

$x^2 = 1$ — Екі параллель жазықтық: x=1 және x=-1.

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ — Жалғыз (0,0,0) нүктесі.

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ — Нақты нүктелердің бос жиыны.

Аралас қосылғыштарды жою

Нақты симметриялы матрица туралы теорема: Q меншікті векторларының ортонормаланған базисі бар. Онда квадраттық бөлік диагональ болады.

$$Qe_i = \lambda_i e_i, \qquad r^{\mathsf{T}} Q r = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2$$

Бұрудан кейін нөлдік емес коэффициентті айнымалылар бойынша толық квадраттар бөлінеді. Қалған айнымалының сызықтық мүшесі параболоидқа әкелуі мүмкін.

Таңбалар, нөлдік коэффициенттер мен бос мүше соңғы түрді анықтайды.

Канондық түрге келтіруге мысал

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 6z - 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - (z-3)^2 = 1$$

Центрі (1,-2,3), осі Oz-ке параллель бірқуысты гиперболоид алынады.

Теріс қосылғышта квадратты бөліп алғанда ортақ минус таңбасын сақтау керек.

Жиі кездесетін қателер

Бір немесе екі қуыс	Оң жағы 1-ге тең болғанда екі оң квадрат бір қуысты, бір оң квадрат екі қуысты береді.
Конус	Оның канондық центрлік теңдеуінің оң жағы нөлге тең.
Цилиндр	Теңдеуде жоқ айнымалы жасаушылар бағытын береді.
Сурет және қима	Жазық қима нүктеге, түзулерге немесе бос жиынға азғындалуы мүмкін.

Өзіндік жұмыс

1. $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$ бетін және оның жарты осьтерін анықтаңыз.

2. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ бетін және оның осінің бағытын анықтаңыз.

3. $z = x^2 + y^2$ қандай бетті береді?

4. Үшөлшемді кеңістікте $y^2 = 4x$ қандай бетті береді?

5. 1-тапсырмадағы беттің z=2 жазықтығымен қимасын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. Жарты осьтері 2, 3 және 4 болатын эллипсоид.

2. Осі Oz, төбелері $(0,0,\pm 1)$ болатын екіқуысты гиперболоид.

3. Осі Oz болатын эллипстік айналу параболоиды.

4. Жасаушылары Oz-ке параллель параболалық цилиндр.

5. z=2 жазықтығында $x^2/4 + y^2/9 = 3/4$. Бұл — эллипс.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Қималар бетті тануға қалай көмектеседі?
2. Бірқуысты және екіқуысты гиперболоидтарды қалай ажыратады?
3. Конустың төбесі арқылы түзу сызықты жасаушылар неліктен өтеді?
4. Эллипстік және гиперболалық параболоидтар несімен ерекшеленеді?
5. Теңдеуден цилиндр жасаушыларының бағыты қалай анықталады?
6. Квадраттық теңдеу қандай азғындалған жиындарды бере алады?

Әдебиеттер

Аналитикалық геометрия бойынша негізгі әдебиеттер

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Сызықтық алгебра және есептер

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.