Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

12-дәріс

Векторлардың көбейтінділері

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі
Аралас көбейтінді және көлемдер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

4-модуль. Аналитикалық геометрия

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: векторлық және аралас көбейтінділерді есептеп, аудандарға, көлемдерге және векторлардың өзара орналасуына қолдану.

Екі вектор

Кеңістіктің бағдары.
Векторлық көбейтінді.
Нормаль және аудан.

Үш вектор

Аралас көбейтінді.
Параллелепипед көлемі.
Компланарлық және тетраэдр көлемі.

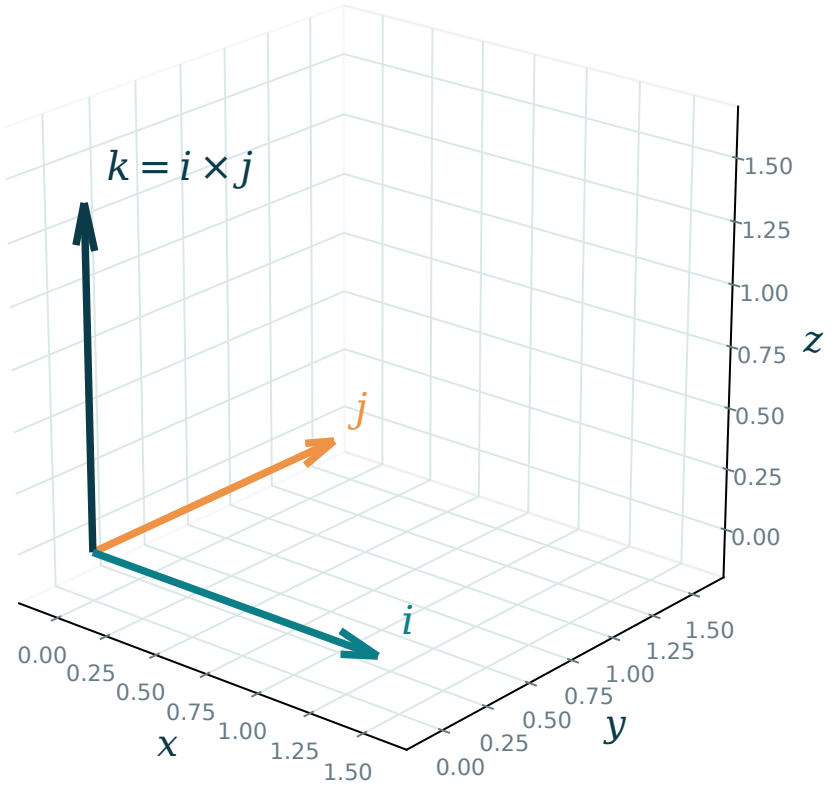
Осы дәрістегі барлық координаталық формулалар үшөлшемді кеңістіктегі оң бағдарланған ортонормаланған базиске қатысты.

Кеңістіктің оң бағдары

Өзара перпендикуляр бірлік i, j, k векторларының реттелген үштігі бағдарды анықтайды.

Оң жүйеде i-ден j-ге кіші бұрышпен бұрылу оң бұранданың k бағытындағы қозғалысына сәйкес келеді.

Екі вектордың орындарын алмастыру бағдарды өзгертеді.



Векторлық көбейтіндінің анықтамасы

Коллинеар емес a және b үшін $a \times b$ векторы екеуіне де перпендикуляр. $(a, b, a \times b)$ үштігінің бағдары оң.

$$|a \times b| = |a|\,|b| \sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Көбейтіндінің ұзындығы a және b векторларына салынған параллелограмм ауданына тең.

Коллинеар векторлар үшін, нөлдік векторларды қоса, $a \times b = 0$ деп алынады.

Базис векторларының көбейтінділері

$$i \times j = k, \qquad j \times k = i, \qquad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \qquad k \times j = -i, \qquad i \times k = -j$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

Таңба көбейткіштердің ретімен анықталады. i, j, k бойынша циклдік ауысу оң бағдарды сақтайды.

Анықтауыш арқылы жазылуы

$a = (a_1, a_2, a_3)$ және $b = (b_1, b_2, b_3)$ болсын. Есте сақтауға ыңғайлы жазылуы:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Бірінші жол бойынша жіктейміз. Алынған сандық алгебралық толықтауыштар i, j, k алдындағы коэффициенттер болады.

Бұл сандық минорлар арқылы векторлық формуланы қысқаша жазу тәсілі.

Векторлық көбейтіндінің координаталары

$$(a \times b)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$(a \times b)_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$(a \times b)_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Екінші координата анықтауышты жіктегендегі минус таңбасын ескереді.
Координаталардың реті циклдік.

Көбейтіндіні есептеуге мысал

$$a = (1, 2, 0), \qquad b = (0, 1, 3)$$

$$a \times b = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1,\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3,\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0)$$

$$a \times b = (6, -3, 1)$$

Нәтиже вектор болады. Оның координаталарын бастапқы векторлармен скалярлық көбейтінділер арқылы тексеруге болады.

Нәтиженің перпендикулярлығын тексеру

$$(6, -3, 1) \cdot (1, 2, 0) = 6 - 6 = 0$$

$$(6, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = -3 + 3 = 0$$

$$|a \times b| = \sqrt{36 + 9 + 1} = \sqrt{46}$$

Екі тексеру де ортогональдықты растайды. Олар нормальдың таңбасын анықтамайды: қарама-қарсы вектор да a мен b-ге перпендикуляр.

Сызықтылық және көбейткіштерді алмастыру

$$a \times b = -(b \times a)$$

$$(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$$

$$a \times (\alpha b + \beta c) = \alpha(a \times b) + \beta(a \times c)$$

Бұл қасиеттер координаталық формуладан шығады. Орын алмастырғанда таңбаның өзгеруі бағдардың өзгеруін көрсетеді.

Векторлық көбейтудің терімді еместігі

Үш векторды көбейткенде жақшалардың орны нәтижеге елеулі әсер етеді.

$$i \times (i \times j) = i \times k = -j$$

$$(i \times i) \times j = 0 \times j = 0$$

Демек, сандарды көбейтудегі жақшаларды өзгерту ережесі мұнда орындалмайды.

Лагранж тепе-теңдігі

Векторлық көбейтінді ұзындығының квадратын векторлардың ұзындықтары мен скалярлық көбейтіндісі арқылы өрнектеуге болады.

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$$

Анықтамалар бойынша оң жақ $|a|^2|b|^2(1 - \cos^2\varphi) = |a|^2|b|^2 \sin^2\varphi$ шамасына тең.

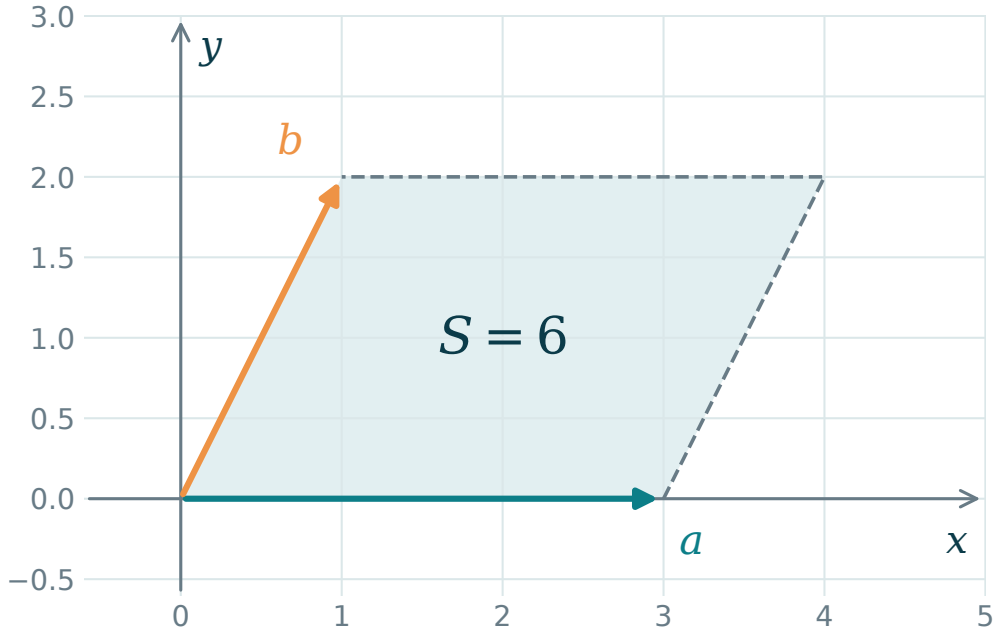
Тепе-теңдік координаталық есептеу мен геометриялық анықтаманы үйлестіреді.

Параллелограмм ауданы

$$S = |a \times b|$$

$a = (3, 0, 0)$ және $b = (1, 2, 0)$ болса:

$$a \times b = (0, 0, 6), \quad S = 6$$



Аудан векторлардың ортақ басының таңдалуына тәуелді емес.

Үшбұрыш ауданы

$A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ төбелері үшін басы ортақ A болатын екі вектор аламыз.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \qquad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -1, 1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Жазықтықтың бірлік нормалі

a және b коллинеар емес және бір жазықтықта жатса, олардың векторлық көбейтіндісі нормаль бағытын береді.

$$n = \pm \frac{a \times b}{|a \times b|}$$

Алдыңғы мысалда $n = \pm(1, -1, 1)/\sqrt{3}$.

Таңбаны таңдау жазықтықтың екі жағының бірін таңдауға сәйкес келеді.

Көбейтінді арқылы коллинеарлықты тексеру

a және b векторларының коллинеар болуы олардың векторлық көбейтіндісінің нөлге тең болуына мәндес.

$$a \times b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \text{ коллинеар}$$

Екі вектор да нөлдік емес болса, теңдік бұрыш синусының нөлге теңдігін білдіреді. Сондықтан бағыттары бірдей немесе қарама-қарсы.

Координаталар бойынша 10-дәрістегі үш минордың бәрі бір мезгілде нөлге тең болады.

Скалярлық және векторлық көбейтінділер

Нәтиже	$a \cdot b$ сан болады, ал $a \times b$ вектор болады.
Орын алмастыру	$a \cdot b = b \cdot a$, бірақ $a \times b = -b \times a$.
Нөлдік нәтиже	Скалярлық көбейтіндіде перпендикулярлықпен, векторлық көбейтіндіде коллинеарлықпен байланысты.
Қолданылуы	Скалярлық көбейтінді бұрыштар мен проекцияларды, векторлық көбейтінді нормальдар мен аудандарды береді.

Үш вектордың аралас көбейтіндісі

Аралас көбейтінді бір вектордың қалған екеуінің векторлық көбейтіндісіне скалярлық көбейтіндісі болады.

$$[a, b, c] = a \cdot (b \times c)$$

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Анықтауыштың жолдары a, b, c векторларынан құрылған. Оларды бағандар ретінде жазғанда да сол мән алынады.

Аралас көбейтіндіге мысал

$$a = (1, 0, 1), \quad b = (0, 2, 0), \quad c = (1, 1, 3)$$

$$b \times c = (6, 0, -2)$$

$$[a, b, c] = (1, 0, 1) \cdot (6, 0, -2) = 4$$

Оң таңба a, b, c үштігінің бағдары таңдалған оң базистің бағдарымен бірдей екенін білдіреді.

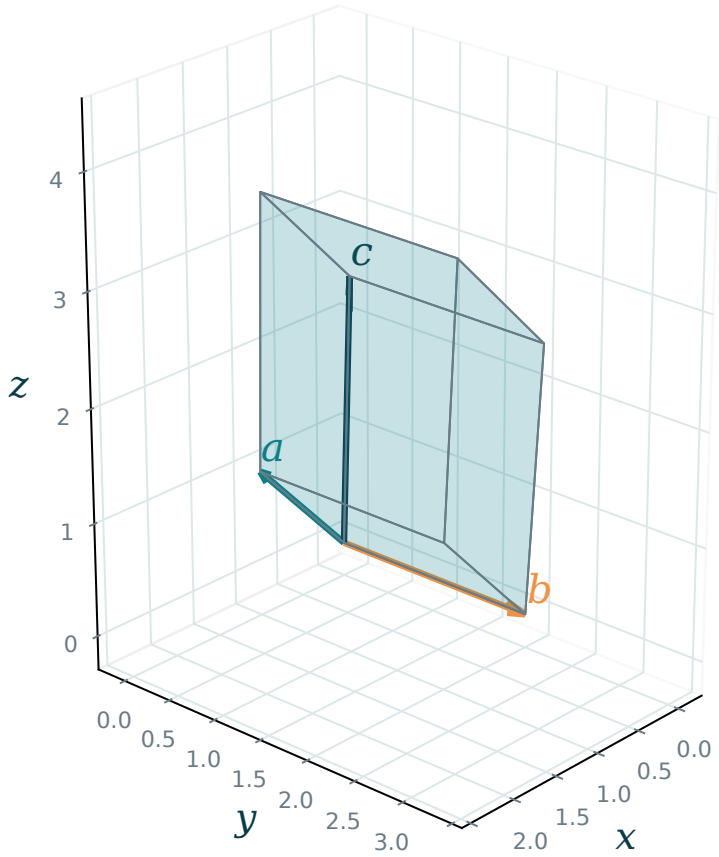
Параллелепипед көлемі

$$V = |[a, b, c]|$$

$b \times c$ векторының ұзындығы табан ауданына тең. a векторының сол бағытқа проекциясы таңбасы бар биіктікті береді.

Көбейтіндінің модулі табан ауданы мен биіктіктің көбейтіндісіне тең.

$$V = |4| = 4$$



Аралас көбейтіндідегі орын алмастырулар

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$$

$$[a, b, c] = -[b, a, c]$$

Циклдік орын алмастыру мәнді сақтайды. Кез келген екі аргументті алмастыру таңбаны өзгертеді.

Бұл ережелер анықтауыш қасиеттерінен шығады. Екі аргумент бірдей болса, көбейтінді нөлге тең.

Компланарлық критерийі

Үш еркін вектор ортақ басына көшіргеннен кейін бір жазықтықта жатса, компланар деп аталады.

$$[a, b, c] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a, b, c \text{ компланар}$$

Анықтауыштың нөлге теңдігі үш вектордың сызықтық тәуелділігіне мәндес. Олардың сызықтық қабықшасының өлшемділігі екіден аспайды.

Критерий нөлдік және коллинеар векторлары бар жағдайларды да қамтиды.

Компланарлықты тексеруге мысал

$$a = (1, 0, 1), \quad b = (0, 1, 1), \quad c = (1, 1, 2)$$

$$c = a + b \quad \Longrightarrow \quad [a, b, c] = 0$$

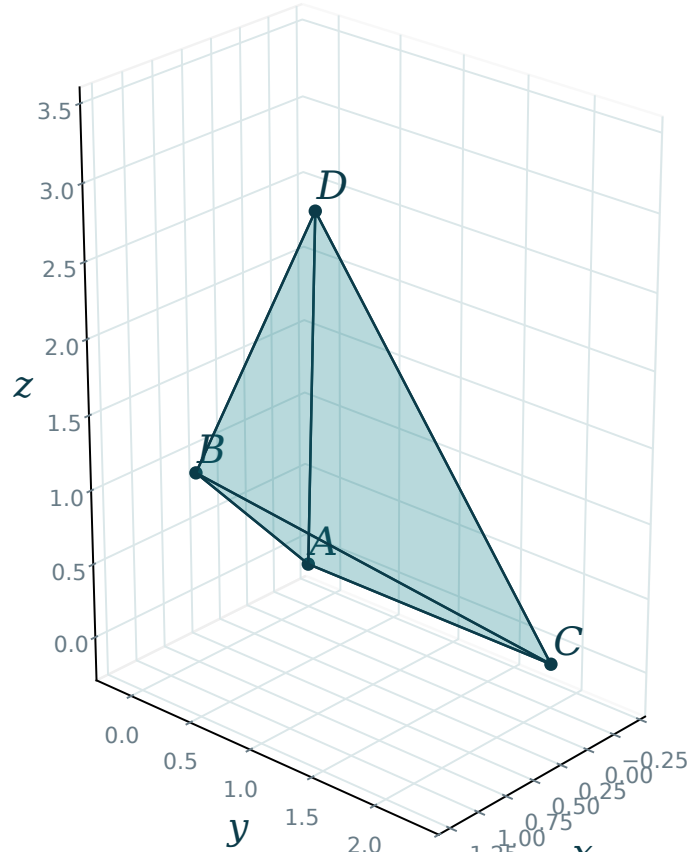
Үшінші вектор алғашқы екеуінің сызықтық комбинациясы болады. Үшеуі координаталар басынан өтетін бір жазықтықта жатады.

Сызықтық байланыс белгілі болса, анықтауышты жіктеу міндетті емес.

Тетраэдр көлемі

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$$

$A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,2,0)$, $D = (1,1,3)$ болсын.



Үш қыр да бір A төбесінен басталады.
Олардың аралас көбейтіндісі 4-ке тең.

$$V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Параллелепипед биіктігі

$a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 2, 0)$, $c = (1, 1, 3)$ үшін a мен b-ге салынған табанға түсірілген биіктікті табайық.

$$a \times b = (-2, 0, 2), \qquad S = 2\sqrt{2}, \qquad V = 4$$

$$h = \frac{V}{S} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

c қырының ұзындығы әдетте биіктіктен өзгеше. Биіктік оның ортогональ құраушысының ұзындығына тең.

Қос векторлық көбейтінді

Бірінің ішінде бірі тұрған екі векторлық көбейтіндісі бар өрнекті ықшамдауға арнайы тепе-теңдік қолданылады.

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

Нәтиже b және c векторларының сызықтық қабықшасында жатады. Оң жақта сандық коэффициенттері бар сызықтық комбинациялар тұр.

Жақшалардың орны формуланың бөлігі болады. Координаталар арқылы тексеруге болады.

Геометриялық есепте формула таңдау

Перпендикуляр	Екі коллинеар емес векторға: $a \times b$.
Аудан	Параллелограмм: $\lvert a \times b \rvert$. Үшбұрыш: осы мәннің жартысы.
Көлем	Параллелепипед: $\lvert [a, b, c] \rvert$. Тетраэдр: алтыдан бір бөлігі.
Компланарлық	Нөлдік аралас көбейтінді: $[a, b, c] = 0$.

Өзіндік жұмыс

1. $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$ үшін $a \times b$ табыңыз.

2. $(2, 0, 0)$ және $(1, 3, 0)$ векторларына салынған параллелограмм ауданын табыңыз.

3. A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,3,0) үшбұрышының ауданын табыңыз.

4. $a = (2, 0, 0)$, $b = (0, 3, 0)$, $c = (1, 1, 4)$ үшін $[a, b, c]$ есептеңіз.

5. $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ және $(3, 2, 5)$ компланар ма?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $a \times b = (-1, -1, 1)$.

2. $S = 6$.

3. $S_{\triangle} = 3$.

4. $[a, b, c] = 24$.

5. Иә, үшінші вектор біріншінің үш есесі мен екіншінің екі есесінің қосындысына тең.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Бағдар векторлық көбейтіндінің таңбасын қалай анықтайды?
2. Векторлық көбейту неліктен терімді емес?
3. Аудан мен бірлік нормаль қалай табылады?
4. Аралас көбейтінді анықтауышпен қалай байланысады?
5. Нөлдік аралас көбейтінді неліктен компланарлықты білдіреді?
6. Тетраэдр көлемінің формуласында 1/6 көбейткіші неліктен пайда болады?

Әдебиеттер

Аналитикалық геометрия бойынша негізгі әдебиеттер

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Сызықтық алгебра және есептер

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.