Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

7-дәріс

Векторлық кеңістіктер

Векторлардың сызықтық комбинациялары
Ішкі кеңістіктер және сызықтық қабықша

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Векторлық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: векторлық кеңістіктің анықтамасын түсіну және векторларды сызықтық комбинация түрінде өрнектеу.

Негізгі ұғымдар

Скалярлар өрісі және вектор.
Векторлық кеңістік аксиомалары.
Ішкі кеңістік және сызықтық қабықша.

Негізгі амалдар

Векторларды қосу және санға көбейту.
Тұйықтықты тексеру.
Комбинация коэффициенттерін табу.

Нәтижесі: векторлық кеңістікті кез келген жиыннан ажырату және вектордың сызықтық қабықшаға тиістілігін зерттеу.

Қандай объектілер вектор бола алады

Векторлық кеңістік бірыңғай ережелермен қосуға және санға көбейтуге болатын объектілерді біріктіреді.

$$(x_1, \dots, x_n), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad p(t) = a + bt + ct^2$$

Сандар жиынтықтары, матрицалар, көпмүшелер мен функциялар вектор бола алады. Геометриялық бағытталған кесінділер солардың бір мысалы болады.

«Вектор» сөзінің мағынасы кеңістік пен таңдалған амалдар арқылы анықталады.

Скалярлар өрісі және екі амал

$\mathbb{F}$ сандар өрісі болсын. Бұл дәрістe $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ немесе $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Өріс элементтері скалярлар деп аталады.

$$u + v \in V, \qquad \lambda u \in V \qquad (u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{F})$$

V жиынында векторларды қосу және векторды скалярға көбейту амалдары беріледі. Екі амалдың нәтижелері де V жиынында қалуы керек.

Скалярлар өрісі кеңістік анықтамасының құрамына кіреді.

Векторларды қосу аксиомалары

$$u + v = v + u, \qquad (u + v) + w = u + (v + w)$$

V жиынында кез келген $u \in V$ үшін $u + 0_V = u$ теңдігін қанағаттандыратын 0_V нөлдік векторы бар.

Әрбір $u \in V$ үшін $u + (-u) = 0_V$ теңдігін қанағаттандыратын қарама-қарсы $-u$ векторы бар.

Қосылғыштардың реті мен топталуын өзгертуге болады. Азайту амалы қарама-қарсы вектор арқылы беріледі.

Скалярға көбейту аксиомалары

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \qquad 1u = u$$

Бұл теңдіктер кез келген $u, v \in V$ және $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ үшін орындалады. Қосу аксиомаларымен бірге олар векторлық кеңістікті анықтайды.

Аксиомалардан шығатын салдарлар

$$0u = 0_V, \qquad \lambda 0_V = 0_V, \qquad (-1)u = -u$$

Мысалы, $(0+0)u = 0u + 0u$. Сол жағы $0u$ шамасына тең, сондықтан қарама-қарсы векторды қосқанда $0u = 0_V$ аламыз.

Егер $\lambda u = 0_V$ және $\lambda \neq 0$ болса, λ^{-1} санына көбейту $u = 0_V$ теңдігін береді.

Нөлдік вектор жалғыз болады. Оның түрі кеңістікке тәуелді: нөлдік сандар жиынтығы, нөлдік матрица немесе нөлдік көпмүше.

Сандар жиынтықтарының кеңістігі

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}\}$$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$\mathbb{R}^3$ кеңістігіндегі мысал: $(1, 2, -1) + 2(0, 1, 3) = (1, 4, 5)$. Нөлдік вектордың барлық координаталары нөлге тең.

Өлшемдері бірдей матрицалар кеңістігі

Өлшемдері бірдей барлық матрицалардың $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ жиыны кәдімгі қосу және санға көбейту амалдарымен векторлық кеңістік құрайды.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Мұндағы нөлдік вектор нөлдік матрица болады. Кәдімгі қосу амалымен өлшемдері әртүрлі матрицаларды бір кеңістікке біріктіруге болмайды.

Көпмүшелер кеңістігі

$$P_2 = \{a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Дәрежесі 2-ден аспайтын екі көпмүшенің қосындысының дәрежесі де 2-ден аспайды. Санға көбейту де осы шартты сақтайды.

$$(1 + t) + 2(t + t^2) = 1 + 3t + 2t^2$$

Нөлдік көпмүше P_2 жиынына кіреді. Дәрежесі дәл 2 болатын көпмүшелер жиыны векторлық кеңістік болмайды.

Бір жиынды әртүрлі өрістер үстінде қарастыру

$\mathbb{C}$ жиынын $\mathbb{R}$ өрісі үстіндегі де, $\mathbb{C}$ өрісі үстіндегі де векторлық кеңістік ретінде қарастыруға болады.

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$z = z \cdot 1 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Рұқсат етілетін коэффициенттер әртүрлі. Сондықтан сызықтық комбинация, тәуелсіздік және өлшемділік туралы сұрақтар скалярлар өрісіне тәуелді.

Кеңістік болмайтын жиындар

Оң координаталар

$\{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}$ жиынында нөлдік вектор жоқ және ол -1 санына көбейтуге қатысты тұйық емес.

Біртекті емес шарт

$\{(x, y) : x + y = 1\}$ жиынында нөл жоқ. Оның екі элементінің қосындысы $x + y = 2$ шартын қанағаттандырады.

Жиынның кеңістік болмайтынын көрсету үшін бір аксиоманың немесе тұйықтықтың орындалмайтынын көрсету жеткілікті.

Ішкі кеңістік

V векторлық кеңістігінің W ішкі жиыны сол амалдармен векторлық кеңістік болса, ол ішкі кеңістік деп аталады.

Критерий: бос емес W жиыны қосу мен кез келген скалярға көбейтуге қатысты тұйық болса, ол ішкі кеңістік болады.

$$u, v \in W,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \Longrightarrow \quad \alpha u + \beta v \in W$$

Атап айтқанда, әрбір ішкі кеңістікте 0_V векторы бар.

Біртекті шарт және ішкі кеңістік

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

Нөл W жиынына тиісті. $u = (u_1, u_2, u_3)$ және $v = (v_1, v_2, v_3)$ векторлары W жиынында жатсын. Онда:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0 + 0 = 0$$

λ санына көбейту теңдікті сақтайды: $\lambda(u_1 + u_2 - u_3) = 0$. Демек, W ішкі кеңістік болады.

Векторлардың сызықтық комбинациясы

Берілген $v_1, \dots, v_k \in V$ векторлары мен $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ скалярлары үшін

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

өрнегі осы векторлардың сызықтық комбинациясы деп аталады.
Коэффициенттер нөлге тең болуы мүмкін.

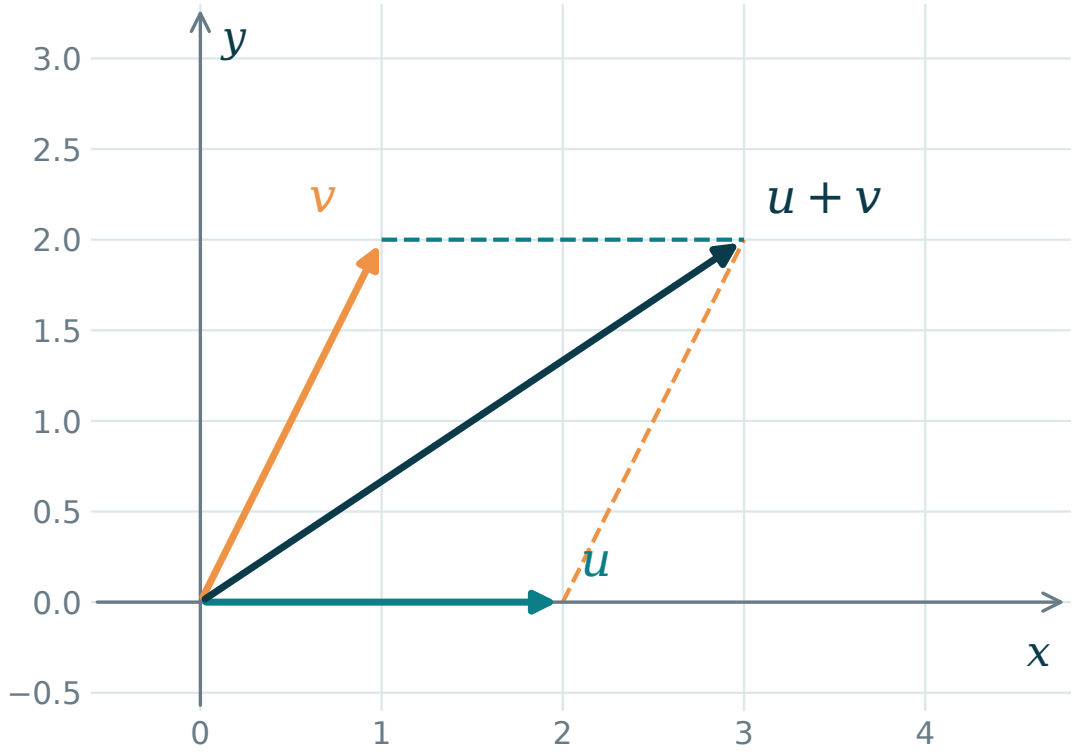
$$2(1,1,0) + 3(0,1,1) = (2,5,3)$$

Сызықтық комбинацияның геометриясы

Жазықтықта қосу параллелограмм ережесіне сәйкес келеді. Санға көбейту ұзындықты, ал коэффициент теріс болса, бағытты да өзгертеді.

$$u = (2, 0), \qquad v = (1, 2)$$

$$u + v = (3, 2)$$



Векторлар жүйесінің сызықтық қабықшасы

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j : \alpha_j \in \mathbb{F} \right\}$$

Сызықтық қабықша таңдалған векторлардың барлық сызықтық комбинацияларынан тұрады. Ол ішкі кеңістік болады.

Бұл бастапқы векторлардың бәрін қамтитын ең кіші ішкі кеңістік: оларды қамтитын кез келген ішкі кеңістік барлық комбинацияларын да қамтиды.

Сызықтық қабықша неліктен тұйық

$$u = \sum_j \alpha_j v_j, \qquad w = \sum_j \beta_j v_j$$

$$\lambda u + \mu w = \sum_j (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j) v_j$$

Алынған комбинация қайтадан сол қабықшаға тиісті. Барлық коэффициенттер нөлге тең болғанда нөлдік вектор алынады.

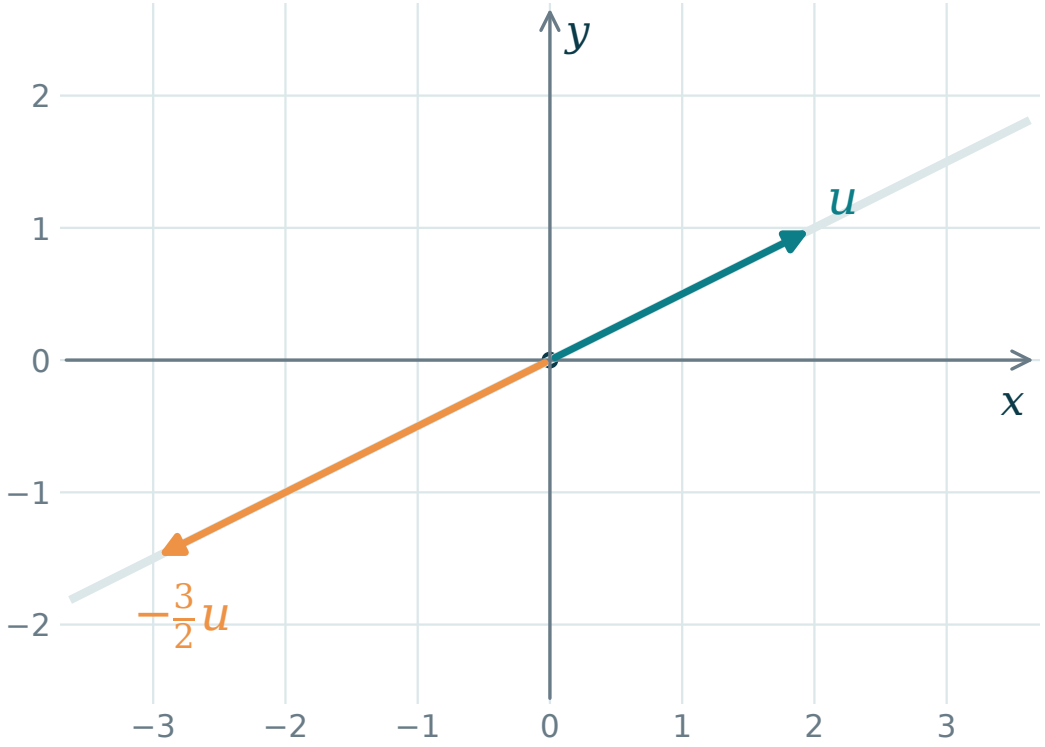
Ішкі кеңістік критерийі орындалады.

Бір нөлдік емес вектордың қабықшасы

$$\text{span}(u) = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Нөлдік емес геометриялық вектордың барлық нақты еселіктері координаталар басынан өтетін түзуді береді.

$u = 0$ кезінде қабықша тек нөлдік вектордан тұрады.



Екі вектор және кеңістіктегі жазықтық

$$u = (1, 1, 0), \qquad v = (0, 1, 1)$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha, \alpha + \beta, \beta)$$

Демек, қабықшадағы кез келген вектор $y = x + z$ шартын қанағаттандырады. Керісінше, $(x, x + z, z) = xu + zv$.

$$\text{span}(u, v) = \{(x, y, z) : y = x + z\}$$

Қабықшаға тиістілікті жүйе арқылы тексеру

b векторын $v_1, \dots, v_k$ векторларының комбинациясы түрінде өрнектеу үшін $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = b$ теңдеуін шешеміз.

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) = (2,5,3)$$

$$\alpha = 2, \quad \alpha + \beta = 5, \quad \beta = 3$$

Шарттар үйлеседі. Демек, өрнектеу бар: b = 2u + 3v.

Өрнектеу болмайтын жағдайға мысал

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) = (1,0,1)$$

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 1, \qquad \alpha + \beta = 0$$

Алғашқы екі шарттан қосынды 2-ге тең болады. Бұл үшінші шартқа қайшы. Сондықтан өрнектеу жоқ.

Жазықтық теңдеуімен тексеру де сол нәтижені береді: $0 \neq 1 + 1$. Вектор қабықшаға тиісті емес.

Өрнектеудің жалғыз болмауы

$$u = (1, 0), \qquad v = (0, 1), \qquad w = (1, 1)$$

$$(3, 2) = 3u + 2v = u + 2w$$

$$(3, 2) = (3 - t)u + (2 - t)v + tw \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Жүйеде артық вектор бар: w = u + v. Келесі дәрісте өрнектеудің жалғыздығын базиспен байланыстырамыз.

Көпмүшелердің сызықтық комбинациялары

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = t + t^2$$

$\alpha p_1 + \beta p_2 = 2 + 5t + 3t^2$ болса, α және β табайық. Бірдей дәрежелердің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$\alpha = 2, \qquad \alpha + \beta = 5, \qquad \beta = 3$$

Сандар жиынтықтары үшін алынған сызықтық жүйені аламыз. Векторлардың әртүрлі түрлеріне бірдей ережелер қолданылады.

Ішкі кеңістіктердің қиылысуы мен бірігуі

Екі ішкі кеңістіктің $U \cap W$ қиылысуы ішкі кеңістік болады: ол екі амалға қатысты тұйықтықты сақтайды.

Бірігу жалпы жағдайда ішкі кеңістік болмайды. Мысалы, екі әртүрлі координаталық осьтің бірігуі қосуға қатысты тұйық емес.

$$(1,0) \in U, \quad (0,1) \in W, \quad (1,1) \notin U \cup W$$

Екі осьті де қамтитын ішкі кеңістік алу үшін олардың сызықтық қабықшасын қарастырады.

Жиі кездесетін қателер

Скалярлар өрісі	Кеңістік қай өріс үстінде қарастырылатынын көрсету қажет.
Тұйықтық	Қосу мен кез келген скалярға көбейту нәтижелері жиында қалуы керек.
Нөлдік вектор	Ішкі кеңістік бастапқы кеңістіктің нөлін міндетті түрде қамтиды.
Өрнектеу	Бір дербес векторды тексеру таңдалған жүйенің бүкіл кеңістікті тудыратынын дәлелдемейді.

Өзіндік жұмыс

1. $W = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$ жиыны $\mathbb{R}^3$ кеңістігінің ішкі кеңістігі бола ма?

2. $S = \{(x, y) : x + y = 2\}$ жиыны $\mathbb{R}^2$ кеңістігінің ішкі кеңістігі бола ма?

3. $(3, 7, 4)$ векторын $u = (1, 1, 0)$ және $v = (0, 1, 1)$ арқылы өрнектеңіз.

4. $(1, 1, 1)$ векторы сол u мен v векторларының қабықшасына тиісті ме?

5. $3 + 5t + 2t^2$ өрнегін $p_1 = 1 + t$ және $p_2 = t + t^2$ арқылы өрнектеңіз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. Иә: шарт біртекті және сызықтық комбинациялар кезінде сақталады.

2. Жоқ: жиында $(0, 0)$ нүктесі жоқ.

3. $(3, 7, 4) = 3u + 4v$.

4. Жоқ: бірінші және үшінші координаталардан $\alpha = \beta = 1$, бірақ онда екінші координата 2-ге тең.

5. $3 + 5t + 2t^2 = 3p_1 + 2p_2$.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Векторлық кеңістік қандай амалдар мен аксиомалар арқылы беріледі?
2. Дәрежесі 2-ден аспайтын көпмүшелер жиынына нөл неліктен кіреді?
3. Жиынның ішкі кеңістік екенін қалай тексереді?
4. Сызықтық қабықшаның өзі неліктен ішкі кеңістік болады?
5. Сызықтық комбинация есебі сызықтық жүйеге қалай келтіріледі?
6. Өрнектеу коэффициенттері неліктен жалғыз болмауы мүмкін?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық курс атауында белсенді сілтеме берілген.