Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

3-дәріс

Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйелері

Үйлесімділігін зерттеу
және Гаусс әдісімен шешу

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. САТЖ және матрицалық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: белгісіздерді біртіндеп жою арқылы сызықтық жүйені зерттеу және оның барлық шешімдерін табу.

Негізгі ұғымдар

Жүйенің шешімі және үйлесімділігі.
Кеңейтілген матрица.
Сатылы түрі.

Негізгі амалдар

Жолдардың элементар түрлендірулері.
Гаусс әдісінің тура және кері жүрісі.
Еркін белгісіздерді бөліп алу.

Зерттеу нәтижесі: бір шешім, шешімнің болмауы немесе барлық шешімдер жиынын сипаттау.

Сызықтық жүйе математикалық модель ретінде

Өнімнің екі түрін жасауға тиісінше 2 және 3 бірлік материал қажет. Барлығы 40 өнім жасалып, 100 бірлік материал жұмсалды.

x пен y әр түрдегі өнімдердің санын белгілесін. Есептің шарттарынан мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 2x + 3y = 100. \end{cases}$$

Екінші теңдеуден екі еселенген бірінші теңдеуді азайтып, $y = 20$, содан кейін $x = 20$ аламыз.

Сызықтық теңдеу және жүйе

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

$a_1, \ldots, a_n$ коэффициенттері мен b оң жағы берілген. Белгісіздер тек бірінші дәрежеде кіреді және бір-біріне көбейтілмейді.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m. \end{cases}$$

Коэффициенттер мен белгісіздер $\mathbb{R}$ немесе $\mathbb{C}$ жиынынан алынады. Геометриялық суреттер $\mathbb{R}$ жағдайына қатысты.

Жүйенің шешімі және үйлесімділігі

Жүйенің шешімі оның барлық теңдеулерін бір мезгілде қанағаттандыратын $(x_1, \dots, x_n)$ реттелген жиынтығы болады.

Үйлесімді жүйе

Кем дегенде бір шешімі бар.
Анықталған жүйенің дәл бір шешімі бар.
Анықталмаған жүйенің бірден көп шешімі бар.

Үйлесімсіз жүйе

Шешімі жоқ.
Зерттеу кезінде барлық теңдеулерді, соның ішінде белгісіздерді жойғаннан кейін алынған жолдарды да тексеру қажет.

$\mathbb{R}$ немесе $\mathbb{C}$ үстіндегі сызықтық жүйенің екі әртүрлі шешімі болса, оның шексіз көп шешімі бар.

Коэффициенттерді тікбұрышты кестемен беру

Бірдей белгісіздердің коэффициенттерін бір бағанға жазамыз. Оң жақтарды тік сызықтың оң жағына шығарамыз.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Сызықтың сол жағындағы кесте A коэффициенттер матрицасы деп аталады. Оң жақтарымен бірге алынған кесте [A | b] кеңейтілген матрицасы деп аталады.

Біртекті және біртекті емес жүйелер

Біртекті жүйе

Барлық оң жақтар нөлге тең. Нөлдік шешім әрқашан бар.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$$

Біртекті емес жүйе

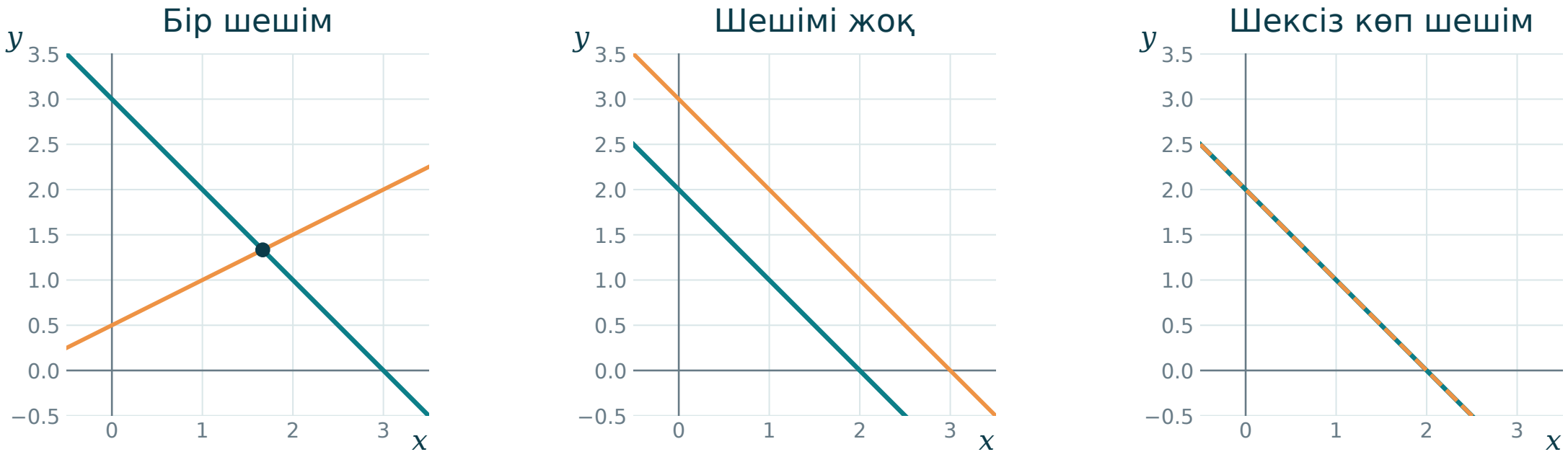
Кем дегенде бір оң жағы нөлден өзге. Үйлесімділігін жеке зерттеу қажет.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

Біртектілік бастапқы теңдеулердің оң жақтары бойынша анықталады.

Екі белгісізі бар жүйенің геометриясы

Коэффициенттері нақты болып, әр теңдеуде нөлден өзге коэффициент болса, әр теңдеу түзуді береді.



Жүйенің шешімдері барлық түзулердің ортақ нүктелеріне сәйкес келеді.

Жолдардың элементар түрлендірулері

Орын алмастыру	$R_i \leftrightarrow R_j$: екі теңдеудің орындарын алмастыру.
Жолды көбейту	$R_i \leftarrow \lambda R_i$, мұндағы $\lambda \neq 0$: теңдеуді нөлден өзге санға көбейту.
Жолды қосу	$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, мұндағы $i \neq j$: бір теңдеуге екінші теңдеудің еселігін қосу.

Кез келген түрлендіру бүкіл жолға, соның ішінде оң жаққа да қолданылады.

Шешімдер жиыны неліктен сақталады

Жолдардың орындарын қайта алмастыруға болады. Нөлден өзге санға көбейтуді сол санға бөлу арқылы кері қайтаруға болады.

$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ түрлендіруінен кейін бастапқы жол $R_i \leftarrow R_i - \lambda R_j$ түрлендіруі арқылы қалпына келеді.

Бастапқы жүйе $\iff$ Түрлендірілген жүйе

Әр қадамның қайтымдылығы жүйелердің мәндестігін білдіреді. Жолды нөлге көбейту бұл қасиетке ие емес.

Кеңейтілген матрицаның сатылы түрі

Әр нөлдік емес жолдың бірінші нөлден өзге элементін бөліп аламыз. Оны жолдың жетекші элементі деп атаймыз.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Нөлдік жолдар төменде орналасады. Әр келесі жетекші элемент алдыңғысынан оң жақта тұрады. Жетекші элементтердің астында нөлдер тұрады.

Жетекші элементтер 1-ден өзгеше болуы мүмкін. Бір жүйенің сатылы түрі әртүрлі болуы мүмкін.

Гаусс әдісінің тура және кері жүрісі

Тура жүріс

Нөлден өзге жетекші элементті табу.
Қажет болса, жолдардың орындарын алмастыру.
Төменгі жолдардан белгісізді жою.
Кестенің қалған бөлігімен жалғастыру.

Кері жүріс

Қайшылықтардың жоқтығын тексеру.
Еркін белгісіздерді бөліп алу.
Жетекші белгісіздерді төменнен жоғары қарай өрнектеу.
Барлық шешімдерді жазу.

Ағымдағы бағанда жетекші жолдардан төмен тек нөлдер тұрса, белгісіздердің келесі бағанына көшеміз.

Сатылы жүйені қалай талдау керек

$c \neq 0$ кезінде $[\,0 \;\cdots\; 0 \mid c\,]$ жолы $0 = c$ қайшылығын білдіреді. Бұл жағдайда шешім жоқ.

Қайшылықтар жоқ болып, әр белгісізге жетекші элемент сәйкес келсе, кері жүріс жалғыз шешімді береді.

Қайшылықтар жоқ және еркін белгісіздер бар болса, оларға кез келген мәндерді беріп, шешімдер жиынын аламыз.

$[\,0 \;\cdots\; 0 \mid 0\,]$ нөлдік жолы жаңа шарт қоспайды.

1-мысал: жалғыз шешімі бар жүйе

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Бірінші жетекші элемент 1-ге тең. Екінші жолдан екі еселенген бірінші жолды, ал үшінші жолдан бірінші жолды азайтамыз.

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \qquad R_3 \leftarrow R_3 - R_1$$

1-мысал: бірінші белгісізді жою

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right]$$

Келесі жетекші элемент 1-ге тең болуы үшін R_2 және R_3 жолдарының орындары алмастырылды. Содан кейін:

$$R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2$$

1-мысал: тура жүрісті аяқтау

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y - 2z = -4, \\ -7z = -21. \end{cases}$$

Жүйе сатылы түрге келтірілді. Қайшылықтар жоқ және әр белгісіз үшін жетекші элемент бар.

Демек, кері жүріс x, y және z мәндерін бірмәнді анықтайды.

1-мысал: кері жүріс және тексеру

$$-7z = -21 \implies z = 3, \qquad y - 2 \cdot 3 = -4 \implies y = 2$$

$$x + 2 + 3 = 6 \implies x = 1$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Бастапқы жүйе бойынша тексеру:

$1 + 2 + 3 = 6, \quad 2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3, \quad 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2.$

2-мысал: үйлесімсіз жүйе

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ түрлендіруін орындаймыз. Мынаны аламыз:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Соңғы жол 0 = 1 теңдігін білдіреді. Бұл қайшылық, сондықтан шешім жоқ.

Кері жүрісті орындау қажет емес: жүйенің үйлесімсіздігі анықталды.

3-мысал: шексіз көп шешім

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 4y - 2z = 6. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ түрлендіруінен кейін $x + 2y - z = 3$ шарты қалады. y және z белгісіздері еркін болады.

$$y = s, \quad z = t, \quad x = 3 - 2s + t, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

s және t параметрлерінің әр таңдауы бір шешім береді. Басқа шешімдер жоқ.

Жалпы шешім және еркін белгісіздер

Алдыңғы мысалдағы жалпы шешім $(3 - 2s + t,\ s,\ t)$ түрінде жазылады. Екі параметр екі еркін белгісізге сәйкес келеді.

$$s = 0,\ t = 0 \implies (3, 0, 0)$$

$$s = 1,\ t = 2 \implies (3, 1, 2)$$

Бірнеше дербес шешім үйлесімділікті көрсетеді, бірақ барлық шешімдер жиынын сипаттауды алмастырмайды.

Біртекті жүйе және нөлдік емес шешімдер

$$x + 2y - z = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x, y, z) = (-2s + t,\ s,\ t)$$

$s = t = 0$ кезінде нөлдік шешім аламыз. $s = 1, t = 0$ кезінде $(-2, 1, 0)$ нөлдік емес шешімін аламыз.

Біртекті жүйеде белгісіздер саны теңдеулер санынан көп болса, кем дегенде бір белгісіз еркін болады.

Демек, $\mathbb{R}$ немесе $\mathbb{C}$ үстіндегі мұндай жүйенің нөлдік емес шешімдері бар.

Параметрлері бар жүйе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + ay = b. \end{cases} \qquad (a-1)y = b - 1$$

$a \neq 1$ болса, шешім жалғыз:
$y = (b-1)/(a-1), \quad x = (a-b)/(a-1).$

$a = 1$ және $b = 1$ болса, $x + y = 1$ теңдеуі қалады: шешімі шексіз көп.

$a = 1$ және $b \neq 1$ болса, қайшылық туындайды: шешімі жоқ.

Нөлдік элемент және жолдарды алмастыру

$$\begin{cases} 2y = 4, \\ 3x - y = 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Бірінші элемент нөлге тең, бірақ сол бағанның төменгі жолында 3 саны тұр. Жолдарды алмастырып, жоюды жалғастырамыз.

$$y = 2, \qquad 3x - 2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Бір элементтің нөлге тең болуы жүйенің үйлесімсіздігін білдірмейді.

Математика тарихындағы жою әдісі

Белгісіздерді біртіндеп жою идеясы ежелгі қытайдың «Тоғыз кітаптағы математика» трактатында кездеседі.

Есептердің коэффициенттерін тікбұрышты кестелерге орналастырып, белгісіздерді біртіндеп табу үшін кестелерді түрлендірген.

Кеңейтілген матрица арқылы қазіргіше жазу кез келген өлшемдегі жүйелерді бірізді зерттеуге мүмкіндік береді.

Дереккөз: Harvard, Math 21b, Nine Chapters exhibit. Сілтеме дәріс соңында.

Гаусс әдісінде жиі кездесетін қателер

Оң жақ	Түрлендіру бүкіл жолға, соның ішінде тік сызықтан кейінгі санға да қолданылады.
Нөлге бөлу	Бөлу алдында жетекші элементті тексереміз. Қажет болса, жолдарды алмастырамыз.
Нөлдік жол	0 = 0 теңдігі қайшылық емес және еркін белгісіздердің болуына кедергі келтірмейді.
Толық емес жауап	Еркін белгісіздер қалса, барлық шешімдер жиыны жазылады.

Өзіндік жұмыс

1. $x + y = 5$, $2x - y = 1$ жүйесін шешіңіз.

2. $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 6$ жүйесінің барлық шешімдерін табыңыз.

3. Үйлесімділігін зерттеңіз: $x - y = 1$, $2x - 2y = 3$.

4. $x + y = 2$, $x + \lambda y = \lambda$ жүйесін барлық $\lambda \in \mathbb{R}$ үшін зерттеңіз.

Жол түрлендірулерін көрсетіп, табылған шешімдерді тексеріңіз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $(x, y) = (2, 3)$. Тексеру: $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 2 - 3 = 1$.

2. $(x, y, z) = (3 - 2s + t,\ s,\ t)$, мұндағы $s, t \in \mathbb{R}$.

3. $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ түрлендіруінен кейін $0 = 1$ аламыз. Шешімі жоқ.

4. $\lambda \neq 1$ кезінде: $x = \lambda/(\lambda - 1)$, $y = (\lambda - 2)/(\lambda - 1)$.
$\lambda = 1$ кезінде $0 = -1$ қайшылығы шығады, сондықтан шешімі жоқ.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

Гаусс әдісі жүйенің барлық шешімдерін сақтай отырып, оны сатылы түрге келтіреді.

1. Теңдеулердің қандай түрлендірулері шешімдер жиынын сақтайды?
2. Қайшылықты тепе-тең нөлдік жолдан қалай ажыратуға болады?
3. Жетекші және еркін белгісіздерді қалай анықтайды?
4. Біртекті жүйе неліктен әрқашан үйлесімді болады?
5. Параметрлері бар жүйенің барлық шешімдерін қалай жазуға болады?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Harvard, Math 21b: The Nine Chapters and elimination.

Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.