Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

8-дәріс

Сызықтық тәуелділік және базис

Векторлар жүйесінің тәуелсіздігі
Өлшемділік және матрицаның рангі

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Векторлық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: сызықтық тәуелділікті зерттеу, базис таңдау, өлшемділік пен рангті анықтау.

Векторлар жүйелері

Тривиалды және тривиалды емес комбинациялар.
Тәуелділік және тәуелсіздік.
Артық векторлар.

Базис және ранг

Тудырушы жүйе және базис.
Координаталар және өлшемділік.
Векторлар жүйесінің рангі және матрицаның рангі.

Нәтижесі: тәуелсіздікті тексеру және базис бойынша векторды өрнектеудің жалғыздығын түсіндіру.

Векторлар жүйесінің сызықтық тәуелділігі

$v_1, \dots, v_k$ жүйесі сызықтық тәуелді деп аталады, егер бәрі бірдей нөлге тең емес скалярлар табылып, мына теңдік орындалса:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V$$

Мұндай комбинация тривиалды емес деп аталады. Теңдік тек барлық коэффициенттер нөлге тең болғанда орындалса, жүйе сызықтық тәуелсіз болады.

«Коэффициенттердің бәрі бірдей нөлге тең емес» деген шарт анықтамада маңызды.

Тәуелділік пен тәуелсіздікке мысалдар

Тәуелді жүйе

$u = (1, 2)$, $v = (2, 4)$.
$2u - v = 0$ орындалады. 2 және -1 коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес.

Тәуелсіз жүйе

$e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$ теңдігінен $\alpha = 0$ және $\beta = 0$ аламыз.

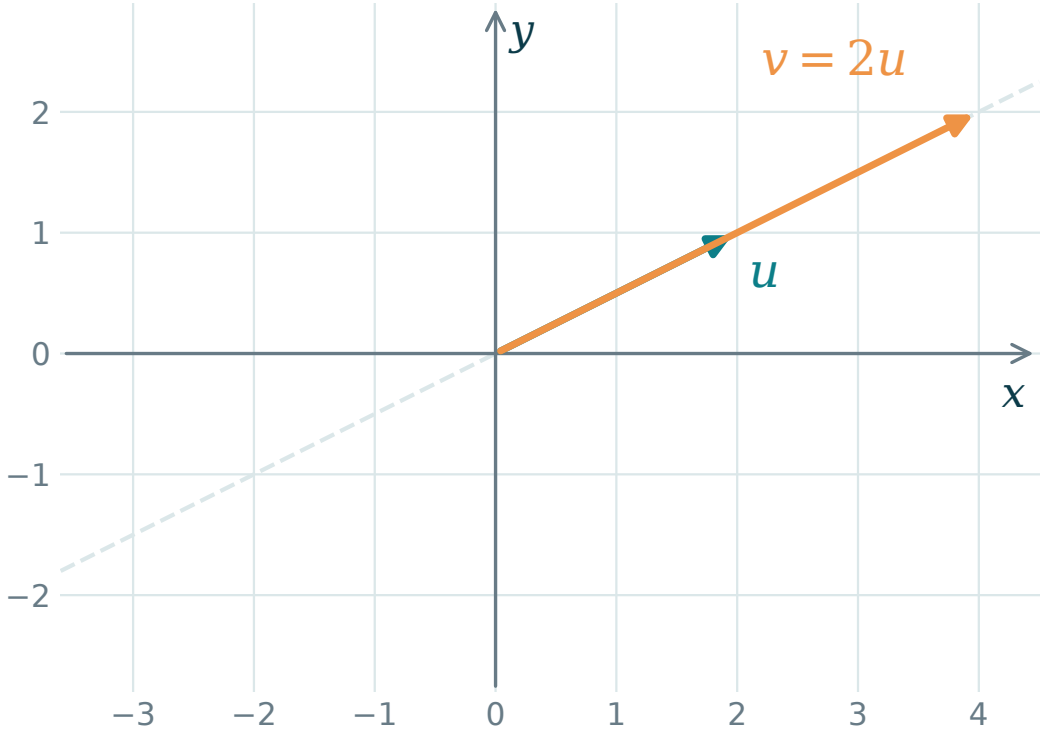
Тәуелділікті дәлелдеуге бір тривиалды емес байланыс жеткілікті. Тәуелсіздік үшін мұндай байланыстардың жоқтығын көрсету қажет.

Екі пропорционал вектор

$u \neq 0$ және $v = \lambda u$ болса, u, v жүйесі тәуелді:

$$\lambda u - v = 0$$

Суретте екі вектор координаталар басынан өтетін бір түзуде жатыр. Біреуі жаңа бағыт қоспайды.



Қалған векторлар арқылы өрнектеу критерийі

Теорема: ақырлы бос емес жүйе тәуелді болуы үшін оның кемінде бір векторы қалғандарының комбинациясы болуы қажетті және жеткілікті.

Тривиалды емес байланыста $\alpha_j \neq 0$ болса:

$$v_j = -\sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i$$

Керісінше, өрнектеудің барлық қосылғыштарын бір жаққа көшіргенде таңдалған вектордың коэффициенті 1 болатын тривиалды емес байланыс аламыз.

Тәуелділіктің қарапайым қасиеттері

Нөлдік вектор	Нөлдік векторы бар кез келген жүйе тәуелді.
Қайталану	Екі бірдей вектор 1 және -1 коэффициенттерімен байланыс береді.
Жүйені кеңейту	Ішкі жүйе тәуелді болса, бүкіл жүйе де тәуелді болады.
Ішкі жүйе	Тәуелсіз жүйенің кез келген ішкі жүйесі тәуелсіз.

Тәуелділіктің скалярлар өрісіне тәуелділігі

1 және i сандарын $\mathbb{C}$ жиынының векторлары ретінде қарастырамыз. $\mathbb{R}$ өрісі үстінде олар тәуелсіз:

$$\alpha + \beta i = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

$\mathbb{C}$ өрісі үстінде осы жұп тәуелді, себебі комплекс коэффициенттерді алуға болады:

$$i \cdot 1 - 1 \cdot i = 0$$

Тәуелсіздікті тексеру

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 1, 0)$$

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ шартын құрамыз. Комбинация коэффициенттері белгісіздер болады:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Алғашқы екі теңдіктен $\alpha = \beta = -\gamma$. Үшіншісінен $-2\gamma = 0$. Барлық коэффициенттер нөлге тең.

Демек, үш вектор сызықтық тәуелсіз.

Квадрат матрица және анықтауыш

$\mathbb{F}^n$ кеңістігінің n векторы A квадрат матрицасының бағандары ретінде жазылсын. Тәуелділік шарты $A\alpha = 0$ түрінде беріледі.

$$v_1, \dots, v_n \text{ тәуелсіз} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0$$

Бұл біртекті квадрат жүйе шешімінің жалғыздығы критерийінен шығады.

Тікбұрышты матрицаға бір толық анықтауышты қолданатын бұл тәсіл жарамайды.

Векторлар саны мен координаталар саны

$k > n$ болса, $\mathbb{F}^n$ кеңістігінің k векторынан тұратын кез келген жүйе тәуелді.

Шынында, нөлдік сызықтық комбинация теңдеуі k коэффициентке қатысты n біртекті теңдеу береді.

Белгісіздер теңдеулерден көп. Жоюдан кейін еркін белгісіз қалады, сондықтан коэффициенттердің нөлдік емес жиынтығы бар.

Атап айтқанда, $\mathbb{R}^2$ жазықтығының кез келген үш векторы тәуелді.

Тудырушы жүйе және базис

V кеңістігінің әрбір векторы $b_1, \dots, b_n$ жүйесінің сызықтық комбинациясы болса, бұл жүйе V кеңістігін тудырады.

$$\text{span}(b_1, \dots, b_n) = V$$

Кеңістіктің базисі: сызықтық тәуелсіз тудырушы жүйе.

Тудыру қасиеті өрнектеудің бар болуын, ал тәуелсіздік оның жалғыздығын қамтамасыз етеді.

Базис бойынша өрнектеудің жалғыздығы

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$$

Бір өрнектеуден екіншісін азайтамыз:

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) b_j = 0$$

Базистің тәуелсіздігінен әр j үшін $\alpha_j - \beta_j = 0$. Демек, барлық коэффициенттер сәйкес келеді.

Сандық кеңістіктің стандарт базисі

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Осы жүйеде барлық сандар жиынтықтарын өрнектеуге болады. Нөлдік комбинацияда әр коэффициент нөлге тең, сондықтан жүйе тәуелсіз.

Стандарт базистегі координаталар сандар жиынтығының компоненттерімен сәйкес келеді.

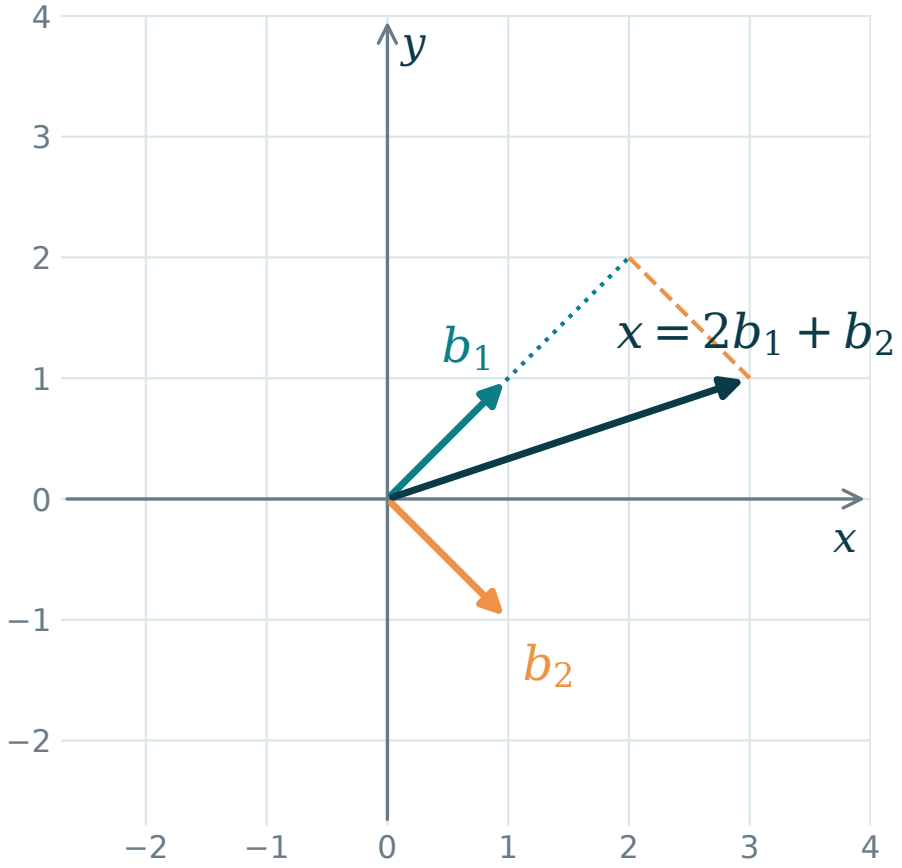
Жазықтықтың стандарт емес базисі

$$b_1 = (1, 1), \qquad b_2 = (1, -1)$$

Векторлар бір түзуде жатпайды және бүкіл жазықтықты тудырады.

$$(3, 1) = 2b_1 + b_2$$

Коэффициенттер базистің таңдалуына тәуелді. Вектордың өзі өзгермейді.



Берілген базистегі координаталар

$b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (1, -1)$ үшін $v = (5, 1)$ векторының координаталарын табайық.

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = (\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (5, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 5, \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 3,\ \beta = 2$$

Осы базистегі координаталар бағаны $(3, 2)^\mathsf{T}$, ал стандарт базисте $(5, 1)^\mathsf{T}$ болады.

Тудырушы жүйеден базис бөліп алу

Бір вектор қалғандарының комбинациясы болса, оны сызықтық қабықшаны өзгертпей алып тастауға болады.

Ақырлы жүйеден артық векторларды алып тастап, тәуелсіз тудырушы жүйе, яғни оның қабықшасының базисін аламыз.

$$w = u + v \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{span}(u, v, w) = \operatorname{span}(u, v)$$

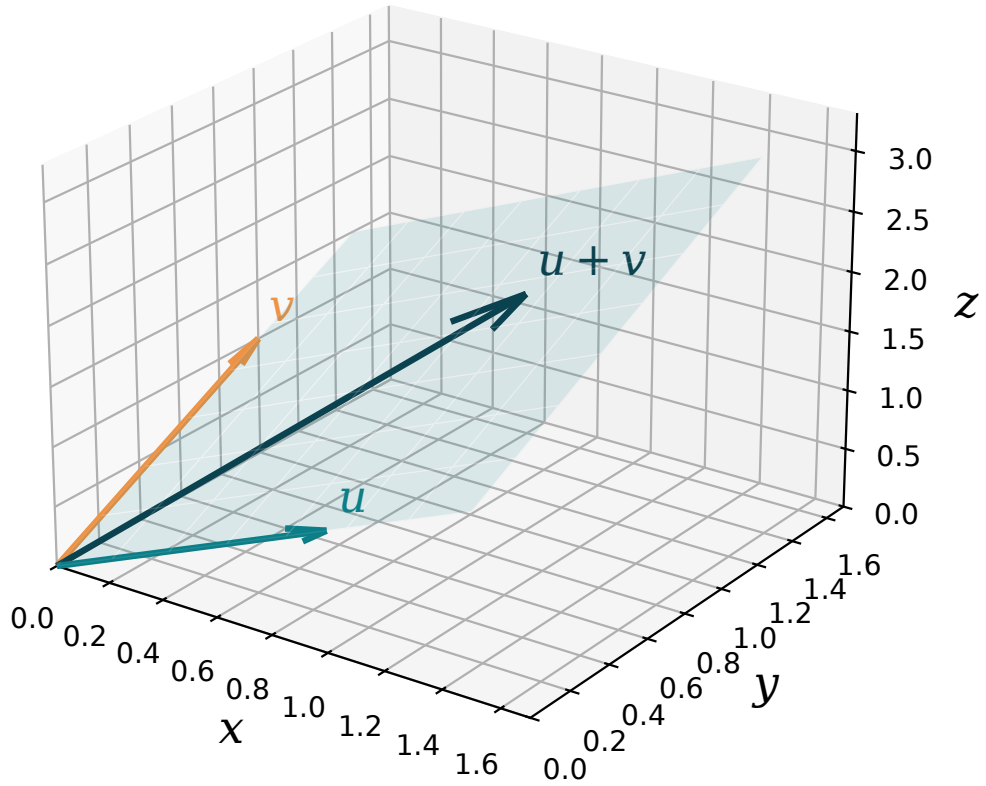
Қалған векторлардың тәуелсіздігін жеке тексеру қажет.

Кеңістіктегі жазықтықтың базисі

$u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$,
$w = (1, 1, 2) = u + v$.

u және v векторлары тәуелсіз: нөлдік комбинацияның алғашқы екі координатасынан коэффициенттер нөлге тең болады.

u, v жүйесі үш вектордың қабықшасына базис болады. Геометриялық тұрғыдан бұл z = x + y жазықтығы.



Кеңістіктің өлшемділігі

Теорема: ақырлы өлшемді векторлық кеңістіктің барлық базистеріндегі векторлар саны бірдей.

$$\dim V = \text{кез келген } V \text{ базисіндегі векторлар саны}$$

Атап айтқанда, $\dim \mathbb{F}^n = n$. V ақырлы жүйемен тудырылса, артық векторларды алып тастағаннан кейін ақырлы базис алынады.

Тек нөлден тұратын кеңістіктің базисі бос, өлшемділігі 0-ге тең.

Көпмүшелер кеңістігінің базисі

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

$1, t, \ldots, t^n$ жүйесі P_n кеңістігін тудырады. Нөлдік комбинация тек барлық коэффициенттер нөлге тең болғанда нөлдік көпмүше болады.

$$\dim P_n = n + 1$$

Тұрақты көпмүшеге байланысты ең жоғары дәреже мен өлшемділіктің айырмасы 1-ге тең.

Матрицалар кеңістігінің базисі

(i, j) орнындағы элементі 1-ге тең, қалған элементтері нөлге тең матрицаны E_{ij} деп белгілейік.

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Өрнектеу бар және жалғыз, себебі әр коэффициент матрицаның сәйкес элементінен анықталады.

$$\dim M_{m \times n}(\mathbb{F}) = mn$$

Ақырлы векторлар жүйесінің рангі

Векторлар жүйесінің рангі: осы жүйеден таңдауға болатын сызықтық тәуелсіз векторлардың ең көп саны.

$$\operatorname{rank}(v_1, \dots, v_k) = \dim \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k)$$

Ең көп вектордан тұратын тәуелсіз ішкі жүйе сол қабықшаны тудырады. Әйтпесе, оған тағы бір вектор қосып, тәуелсіздікті сақтауға болар еді.

Тек нөлдік векторлардан тұратын жүйенің рангі 0-ге тең.

Рангтің минорлар арқылы анықтамасы

A матрицасының рангі: оның нөлден өзге минорларының ең үлкен реті. Нөлдік матрицаның рангі 0-ге тең деп алынады.

$$0 \le \operatorname{rank} A \le \min(m, n) \qquad (A \text{ өлшемі } m \times n)$$

Нөлден өзге r-ретті минор болса, ранг r-ден кем емес. Теңдікті дәлелдеу үшін жоғары ретті нөлдік емес минорлардың жоқтығын көрсету қажет.

n-ші ретті квадрат матрицаның анықтауышы нөлден өзге болса, рангі n-ге тең.

Рангті минорлар арқылы есептеуге мысал

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Бірінші, үшінші жолдар мен алғашқы екі бағаннан нөлден өзге екінші ретті минор алынды. Сондықтан ранг кемінде 2-ге тең.

Толық анықтауыш нөлге тең: екінші жол біріншіден екі есе үлкен. Жоғары реттер жоқ. Демек, ранг 2-ге тең.

Жолдар рангі және бағандар рангі

Матрица бағандарын векторлар жүйесі ретінде қарастыруға болады. Жолдар да басқа сандық кеңістікте векторлар жүйесін құрайды.

$$\text{Жолдар рангі} = \text{бағандар рангі} = \operatorname{rank} A$$

Бұл ранг туралы теорема. Келесі дәрісте оны сатылы түр арқылы негіздеп, рангті есептеу тәсілдерін қарастырамыз.

Жиі кездесетін қателер

Тәуелділік	Тривиалды емес байланыста кемінде бір коэффициент нөлден өзге болуы керек.
Базис	Тудыру қасиеті жеткіліксіз: тәуелсіздік те қажет.
Координаталар	Координаталардың сандық жиынтығы таңдалған базиске тәуелді.
Минорлар арқылы ранг	Бір нөлдік емес минор нақты рангті бермейді: ол тек төменгі бағаны береді.

Өзіндік жұмыс

1. $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$ жұбының тәуелділігін зерттеңіз.

2. $p_1 = 1 + t$, $p_2 = t + t^2$, $p_3 = 1 + 2t + t^2$ қабықшасының базисін таңдаңыз.

3. $(4, 2)$ векторының $(1, 1)$, $(1, -1)$ базисіндегі координаталарын табыңыз.

4. Рангін табыңыз: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. Тәуелді: $2(1,2,3)-(2,4,6)=0$.

2. $p_3=p_1+p_2$. p_1,p_2 жұбы тәуелсіз және қабықшаның базисі болады. Оның өлшемділігі 2-ге тең.

3. Координаталары $(3,1)$, себебі $3(1,1)+(1,-1)=(4,2)$.

4. Ранг 2-ге тең: жоғарғы сол жақ екінші ретті минор 1-ге тең, үшінші жол алғашқы екеуінің қосындысы болады.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Тривиалды байланысты тривиалды емес байланыстан қалай ажыратады?
2. Тәуелді жүйедегі бір векторды қалғандары арқылы неліктен өрнектеуге болады?
3. Базисті қандай екі шарт анықтайды?
4. Базис бойынша векторды өрнектеу неліктен жалғыз?
5. Қабықшаның өлшемділігі векторлар жүйесінің рангімен қалай байланысады?
6. Минорлар арқылы рангтің нақты мәнін қалай дәлелдейді?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық курс атауында белсенді сілтеме берілген.