Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

5-дәріс

n-ші ретті анықтауыштар

Индукциялық анықтама және негізгі қасиеттері
Минорлар, алгебралық толықтауыштар және есептеулер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. САТЖ және матрицалық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: кез келген ретті анықтауышты анықтау және оның қасиеттерін есептеулерде қолдану.

Анықтама және жіктеулер

Минорлар мен алгебралық толықтауыштар.
Индукциялық анықтама.
Жол не баған бойынша жіктеу.

Қасиеттері және есептеулер

Жол түрлендірулерінің әсері.
Үшбұрышты матрицалар.
Жою әдісі арқылы есептеу.

Бастапқы білім: екінші және үшінші ретті анықтауыштар, жолдардың элементар түрлендірулері.

Квадрат матрица элементінің миноры

a_{ij} элементінің M_{ij} миноры i-жол мен j-бағанды өшіру арқылы алынатын $n-1$ ретті анықтауыш болады.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Мысалда бірінші жол мен екінші баған өшірілген. Минор қалған элементтер кестесі емес, сан болады.

Элементтің алгебралық толықтауышы

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Алгебралық толықтауыш минордан индекстер қосындысына тәуелді таңба көбейткішімен ерекшеленеді.

$$M_{12} = -8 \quad \Longrightarrow \quad C_{12} = (-1)^3(-8) = 8$$

Мұнда қолданылатын C_{ij} белгілеуі толықтауышты матрицаның өз a_{ij} элементінен ажыратуға көмектеседі.

Таңбалардың шахматтық ережесі

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Жоғарғы сол жақ бұрышта плюс тұрады.
Әр жол мен баған бойында таңбалар кезектеседі.
Таңба элементтің таңбасымен емес, орнымен анықталады.

$$C_{11} = M_{11}, \qquad C_{12} = -M_{12}, \qquad C_{23} = -M_{23}$$

Алдымен минорды есептеп, содан кейін оны орынға сәйкес таңбаға көбейтеді.

Анықтауыштың индукциялық анықтамасы

Базасы: бірінші ретті анықтауыш жалғыз элементіне тең, $\det(a_{11}) = a_{11}$.

$n-1$ ретті анықтауыштар анықталған болсын. Реті $n \geq 2$ болатын A матрицасы үшін:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} M_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j}$$

Бұл бірінші жол бойынша жіктеу болады. Әр минор реті төмен анықтауыш үшін сол ережемен есептеледі.

Анықтаманы екінші рет үшін тексеру

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad M_{11} = d, \quad M_{12} = c$$

$$\det A = a \cdot d - b \cdot c$$

Демек, индукциялық анықтама екінші ретті анықтауыштың белгілі формуласымен үйлеседі.

Үшінші рет үшін ол Саррюс ережесіндегі алты қосылғышты береді.

Кез келген жол не баған бойынша жіктеу

Анықтауышты жіктеу теоремасы есептеуге ыңғайлы жолды немесе бағанды таңдауға мүмкіндік береді.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{бекітілген } i \text{ үшін}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \qquad \text{бекітілген } j \text{ үшін}$$

Таңдалған жолда не бағанда нөлдер көп болса, қосылғыштардың көпшілігі нөлге айналады.

Мысал: екінші жол бойынша жіктеу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot C_{21} - C_{22} + 4C_{23}$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

4-дәрістегідей $\det A = -(-6) + 4 \cdot 3 = 18$ аламыз.

Төртінші ретті анықтауышқа мысал

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Бірінші жолда нөлден өзге бір ғана элемент бар. Сондықтан осы жол бойынша жіктеуде бір қосылғыш қалады.

$$D = 2M_{11}$$

Жалғасы: қалған миноры есептеу

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = 1\big((-1)\cdot 2 - 1\cdot 2\big) - 2(3\cdot 2 - 1\cdot 0) = -16$$

$$D = 2\cdot(-16) = -32$$

Транспонирлеу және қасиеттер симметриясы

$$\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$$

Бүкіл матрицаны транспонирлеу кезінде жолдар мен бағандардың орындарын алмастыру анықтауышты өзгертпейді.

Сондықтан жолдар үшін тұжырымдалған әр қасиеттің бағандар үшін де ұқсас тұжырымы бар.

Есептеу кезінде жол не баған түрлендірулерін таңдап, олардың әсерін әр қадамда ескеруге болады.

Екі жолдың орындарын алмастыру

Екі жолдың орындарын алмастырса, анықтауыштың таңбасы өзгереді.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Екі жолды s рет алмастырғаннан кейін минус бірдің s дәрежесіне тең көбейткіш пайда болады.

$$\det B = (-1)^s \det A$$

Жолдың және бүкіл матрицаның көбейткіші

Бір жолды λ санына көбейтсе, анықтауыш λ санына көбейеді. Жолдың ортақ көбейткішін анықтауыш таңбасының сыртына шығаруға болады.

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \qquad (A \text{ матрицасының реті } n)$$

Бүкіл матрицаны көбейткенде көбейткіш n жолдың әрқайсысында пайда болады.

Бір жол бойынша сызықтылық

Қалған жолдар бекітілгенде анықтауыш таңдалған жол бойынша сызықты болады. Жол қосынды түрінде берілсе, анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына жіктеледі.

$$\begin{vmatrix} a+u & b+v \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v \\ c & d \end{vmatrix}$$

Бұл бүкіл матрица бойынша сызықтылықты білдірмейді. Мысалы, $\det(I_2 + I_2) = 4$, бірақ $\det I_2 + \det I_2 = 2$.

Анықтауыштың нөлге тең болу жағдайлары

Матрицада нөлдік жол, екі тең жол немесе екі пропорционал жол болса, анықтауыш нөлге тең.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Тең жолдардың орындарын алмастыру матрицаны өзгертпейді, бірақ анықтауыштың таңбасын өзгертеді. Сондықтан D = -D, бұдан D = 0.

Жолға басқа жолдың еселігін қосу

B матрицасы A матрицасынан $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ түрлендіруімен алынсын, мұндағы $i \neq j$. Онда анықтауыш сақталады.

$$\det B = \det A$$

Дәлелдеу: сызықтылық бойынша бастапқы анықтауыш пен екі пропорционал жолы бар анықтауыштың қосындысын аламыз. Екінші қосылғыш нөлге тең.

$$\det B = \det A + \lambda \cdot 0 = \det A$$

Үшбұрышты матрицаның анықтауышы

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Жоғарғы үшбұрышты матрицаны бірінші баған бойынша жіктегенде бір қосылғыш қалады. Одан әрі индукцияны қолданамыз.

Төменгі үшбұрышты матрица үшін тұжырым транспонирлеуден шығады.

Анықтауышты жою әдісімен есептеу

Матрицаны үшбұрышты түрге келтіреміз. Әр қадамның анықтауышқа әсерін жазып отырамыз.

Басқа жолдың еселігін қосу	Анықтауыш сақталады.
Екі жолдың орындарын алмастыру	Анықтауыштың таңбасы өзгереді.
Жолды $\lambda \neq 0$ санына көбейту	Анықтауыш λ санына көбейеді.
Үшбұрышты матрица	Диагональ элементтердің көбейтіндісін есептейміз.

Жолдарды алмастырмай жоюға мысал

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Түрлендірулер: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$,
содан кейін $R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2$. Бұлардың бәрі анықтауышты сақтайды.

$$\det A = \det T = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Жолдарды алмастырып жоюға мысал

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Алдымен $R_1 \leftrightarrow R_2$. Содан кейін $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1$ және $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$. Жалғыз орын алмастыру таңбаны өзгертеді.

$$\det T = -\det A, \qquad \det A = -1 \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

Матрицалар көбейтіндісінің анықтауышы

Реттері бірдей A және B квадрат матрицалары үшін:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Бұл қасиет анықтауыштарға қатысты. Матрицалардың өздері ауыстырымды болмауы мүмкін: $AB \neq BA$. Бірақ $\det(AB) = \det(BA)$.

Анықтауыш және шешімнің жалғыздығы

Реті n болатын A квадрат матрицасы үшін $\det A \neq 0$ шарты жою кезінде n жетекші элементтің болуына мәндес.

Шынында, элементар түрлендірулер анықтауышты тек нөлден өзге көбейткішке өзгертеді. Үшбұрышты түрде ол жетекші элементтердің көбейтіндісіне тең.

$$\det A \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AX = b \text{ кез келген } b \text{ үшін жалғыз шешімі бар}$$

$\det A = 0$ кезінде біртекті емес жүйе не үйлесімсіз болады, не шексіз көп шешімі болады.

Есептеу әдістерін салыстыру

Жіктеу	Нөлдер көп болғанда ыңғайлы. Минорлар мен толықтауыштардың таңбаларын мұқият есептеу қажет.
Жолдардың қасиеттері	Анықтауышты жіктемес бұрын нөлдер алуға және есептеулерді қысқартуға мүмкіндік береді.
Үшбұрышты түрге келтіру	Кез келген ретті матрицаларға жарамды. Жолдардың орындарын алмастыру мен оларды санға көбейтуді ескеру қажет.

Бір анықтауышты есептегенде бірнеше әдісті бірізді ұштастыруға болады.

Есептеулерде жиі кездесетін қателер

Минор және толықтауыш

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ өрнегінде орынға сәйкес таңба ескеріледі.

Орын алмастыру

Екі жолдың орындарын алмастыру анықтауыштың таңбасын өзгертеді.

Ортақ көбейткіш

n-ші ретті матрица үшін $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ орындалады.

Сызықтылық

Қалған жолдар бекітілгенде сызықтылық бір жол бойынша орындалады. Қосындының анықтауышы жалпы жағдайда анықтауыштардың қосындысына тең емес.

Өзіндік жұмыс

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. M_{12} және C_{12} табыңыз.
2. $\det A$ мәнін кез келген әдіспен есептеңіз.
3. $\det(2A)$ және A матрицасының алғашқы екі жолын алмастырғаннан кейінгі анықтауышты табыңыз.
4. Диагоналі $2, -1, 3, 4$ болатын жоғарғы үшбұрышты матрицаның анықтауышын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad C_{12} = 2$$

$$\det A = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 7$$

3. $\det(2A) = 2^3 \cdot 7 = 56$. Жолдарды алмастырғаннан кейін -7 аламыз.

4. $2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Индукциялық анықтама анықтауыштың ретін қалай төмендетеді?
2. Минор алгебралық толықтауыштан несімен ерекшеленеді?
3. Басқа жолдың еселігін қосу анықтауышты неліктен сақтайды?
4. Үшбұрышты түрге келтіргенде жол алмастыру қалай ескеріледі?
5. Бір жолды және бүкіл матрицаны санға көбейтудің айырмашылығы қандай?
6. Квадрат жүйе үшін анықтауыштың нөлден өзге болуы нені білдіреді?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.