Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

6-дәріс

Кері матрица

Керілену критерийі
Толықтауыштар арқылы өрнектеу және Гаусс-Жордан әдісі

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. САТЖ және матрицалық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: квадрат матрицаның кері болуын анықтау және кері матрицаны екі тәсілмен табу.

Теориялық нәтижелер

Анықтама және жалғыздық.
Анықтауыш арқылы берілетін критерий.
Одақтас матрица және кері матрица формуласы.

Практикалық әдістер

Гаусс-Жордан әдісі.
Матрицалық көбейтіндімен тексеру.
Жүйелер мен матрицалық теңдеулерді шешу.

Бастапқы білім: матрицалық көбейтінді, анықтауыш, толықтауыштар және жол түрлендірулері.

Кері матрицаның анықтамасы

A матрицасы реті n болатын квадрат матрица болсын. Реті дәл сондай B матрицасы A матрицасына кері деп аталады, егер:

$$AB = BA = I_n$$

Белгілеуі: $B = A^{-1}$. Кері матрицасы бар матрица керіленетін немесе ерекше емес матрица деп аталады.

Кері матрица матрицалық көбейтуге қатысты анықталады. Әр элементтің кері санын жеке-жеке алуға болмайды.

Мысал және анықтаманы тексеру

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сол сияқты $BA = I_2$. Демек, $B = A^{-1}$.

Керілену критерийі

$$A \text{ керіленеді} \iff \det A \neq 0$$

Қажеттілігі

Егер $AB = I_n$ болса,
$\det A \cdot \det B = 1$.
Сондықтан $\det A \neq 0$.

Жеткіліктілігі

Егер $\det A \neq 0$ болса, жою әдісі n жетекші элемент береді.
А матрицасын жолдардың қайтымды түрлендірулері арқылы I_n түріне келтіруге болады.

Сол түрлендірулерді бірлік матрицаға қолдансақ, кері матрица аламыз. Бұл тұжырымды Гаусс-Жордан әдісінде негіздейміз.

Кері матрицаның жалғыздығы

B және C бір A матрицасына кері матрицалар болсын. Онда $BA = I_n$ және $AC = I_n$.

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Демек, керіленетін матрицаның бір ғана кері матрицасы бар.

Сондықтан есептеудің әртүрлі дұрыс әдістері бірдей жауап беруі керек.

Одақтас матрица

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ шамалары a_{ij} элементтерінің алгебралық толықтауыштары болсын. Алдымен $C = (C_{ij})$ толықтауыштар матрицасын құрамыз.

$$\operatorname{adj} A = C^{\mathsf{T}} = (C_{ji})$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Одақтас матрицаны алу үшін толықтауыштар кестесін міндетті түрде транспонирлейді.

Кері матрицаның формуласы

$$A\,\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A\,A = (\det A) I_n$$

Көбейтіндінің бас диагоналінде анықтауыштың жіктеулері шығады. Диагональдан тыс екі тең жолы немесе бағаны бар анықтауыштар алынады.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A \qquad (\det A \neq 0)$$

Анықтауыш нөлден өзге болса, тепе-теңдікті det A шамасына бөлу кері матрицаның анықтамасын береді.

Екінші ретті кері матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \Delta = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Диагональ элементтердің орындарын алмастырып, қалған екеуінің таңбаларын өзгертеміз де, алынған матрицаны анықтауышқа бөлеміз.

Формула бойынша есептеуге мысал

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тексеру: $3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 1$, $3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$.
Көбейтіндінің қалған элементтері де $AA^{-1} = I_2$ теңдігін береді.

Үшінші ретті матрицаға мысал

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Мұнда $\det A = 2$, ал C алгебралық толықтауыштардан тұрады.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ерекше матрица неліктен керіленбейді

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad Av = 0$$

A^{-1} бар болса, $Av = 0$ теңдігін A^{-1} матрицасына көбейту $v = 0$ теңдігін берер еді. Қайшылық алдық.

Бұл мысалда $\det A = 0$, жолдар пропорционал және әртүрлі бастапқы бағандардың бейнелері бірдей болуы мүмкін.

Кері матрицалардың қасиеттері

A және B керіленетін, реттері бірдей матрицалар болсын. $\lambda \neq 0$ болсын. Онда:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$$

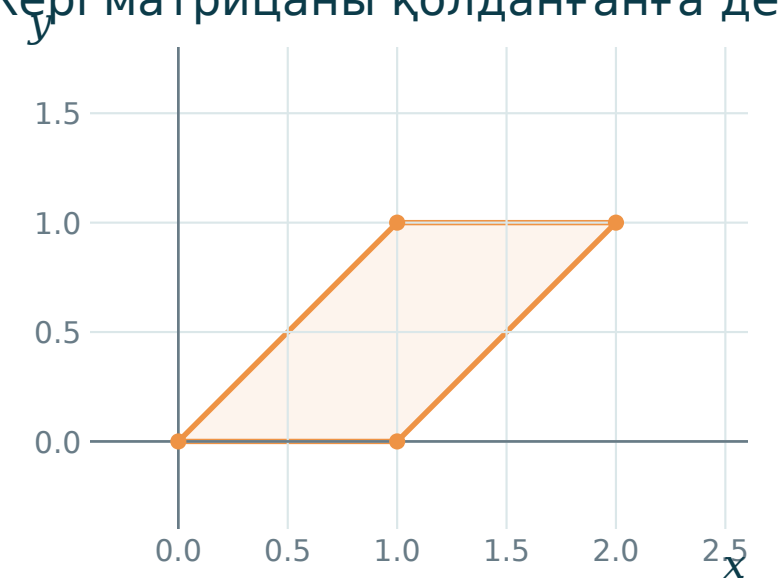
$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \qquad (A^{-1})^{-1} = A$$

Көбейтіндінің кері матрицасын алғанда көбейткіштердің реті өзгереді. Соның арқасында көршілес өзара кері көбейткіштер қысқарады.

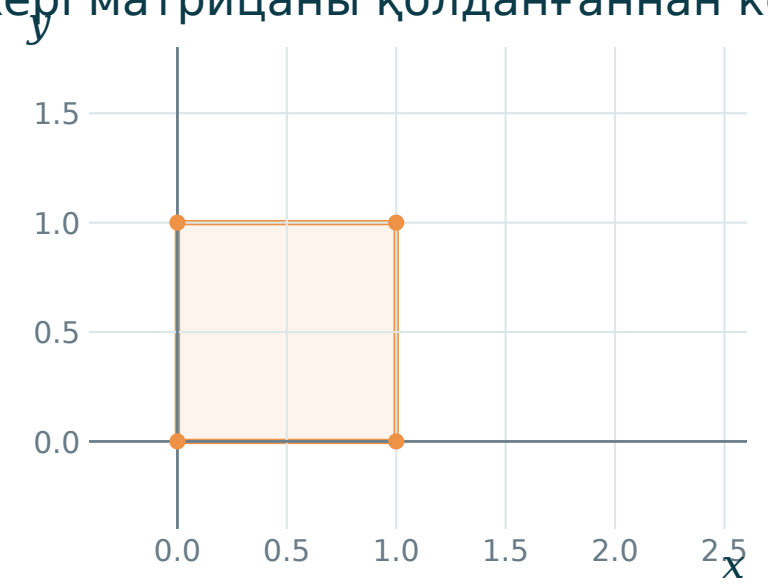
Кері матрица түрлендіруді кері қайтарады

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кері матрицаны қолданғанға дейін



Кері матрицаны қолданғаннан кейін



Алдымен A квадратты параллелограмға көшіреді. Содан кейін кері матрица квадратты қалпына келтіреді.

Гаусс-Жордан әдісі

А матрицасының оң жағына реті дәл сондай бірлік матрицаны тіркейміз. Барлық түрлендірулер кеңейтілген кестенің толық жолдарына қолданылады.

$$[\,A \mid I_n\,] \quad \longrightarrow \quad [\,I_n \mid A^{-1}\,]$$

Гаусстың кәдімгі тура жүрісінен өзгеше, жетекші элементтердің астында да, үстінде де нөлдер аламыз. Әр жетекші элементті 1-ге келтіреміз.

Сол бөлікті бірлік матрицаға келтіру мүмкін болмаса, бастапқы матрица керіленбейді.

Гаусс-Жордан әдісінің негіздемесі

Жолдардың әрбір элементар түрлендіруі сол жақтан керіленетін элементар матрицаға көбейту болады. Олардың көбейтіндісін E деп белгілейік.

$$[\,A \mid I_n\,] \quad \longrightarrow \quad [\,EA \mid E\,]$$

Егер $EA = I_n$ болса, $A = E^{-1}$, демек, $E = A^{-1}$. Сондықтан оң жақта дәл кері матрица алынады.

Барлық қадамдар қайтымды. Амалдардың бірдей тізбегі кестенің екі бөлігіне де қолданылады.

1-мысал: Гаусс-Жордан әдісінің басталуы

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Жолдарды алмастырайық: $R_1 \leftrightarrow R_2$. Содан кейін $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ түрлендіруін орындаймыз.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

1-мысал: есептеулерді аяқтау

Екінші жолды -1 санына көбейтеміз. Содан кейін $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ түрлендіруін орындаймыз.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2-мысал: үшінші ретті матрица

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_3 \leftarrow R_3 - R_1$, содан кейін $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$ орындаймыз. Үшінші жолдың сол бөлігінде нөлден өзге бір элемент қалады.

$$R_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2-мысал: жетекші элементті нормалау

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Үшінші жолды 2-ге бөлеміз: $R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3$. Сол бөлікпен бірге оң жақтағы барлық элементтер де 2-ге бөлінеді.

$$R_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

2-мысал: кері жүріс

Алдымен $R_2 \leftarrow R_2 - R_3$, содан кейін $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$. Жаңартылған жолдарды қолданамыз.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Оң бөлік алгебралық толықтауыштар арқылы алынған нәтижемен бірдей. Сол бөлік бірлік матрицаға тең.

Жүйені кері матрица арқылы шешу

$$AX = b, \quad \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрицалық теңдеулер және көбейту реті

A және C керіленетін болсын. Барлық көбейтінділердің өлшемдері үйлессін.

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

$$XA = B \quad \Longrightarrow \quad X = BA^{-1}$$

$$AXC = B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}BC^{-1}$$

Кері көбейткіш бастапқы матрицаны жоятын жақтан қойылады.

Табылған кері матрицаны тексеру

Бастапқы A матрицасы мен табылған B матрицасының кәдімгі матрицалық көбейтіндісін тексереміз.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадрат матрицалар үшін $AB = I_n$ шартының өзі $B = A^{-1}$ және $BA = I_n$ теңдіктерін қамтамасыз етеді.

Кері матрицаны табуда жиі кездесетін қателер

Элементтерді жеке керілеу	A^{-1} матрицасы жалпы жағдайда $1/a_{ij}$ кестесіне тең емес.
Одақтас матрица	Толықтауыштарды есептегеннен кейін кестені міндетті түрде транспонирлейді.
Жол түрлендірулері	Әр қадам кеңейтілген кестенің екі бөлігіне де қолданылады.
Көбейткіштердің реті	$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Матрицалардың орындарын еркін алмастыруға болмайды.

Өзіндік жұмыс

1. Кері матрицасын табыңыз: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Шешіңіз: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Матрица керілене ме: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

1 және 2-есептерде жауапты тікелей қою немесе көбейту арқылы тексеріңіз.

Қосымша есеп: үшбұрышты матрица

Кері матрицаны Гаусс-Жордан әдісімен табыңыз. Жауапты көбейту арқылы тексеріңіз.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нұсқау: анықтауыш 1-ге тең. Жою кезінде бас диагональдың үстінде нөлдер алу жеткілікті.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $(x, y) = (3, 1)$. Тексеру: $2 \cdot 3 + 1 = 7$, $3 + 1 = 4$.

3. Анықтауыш $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$ шамасына тең, матрица керіленбейді.

1-есепте бастапқы матрицаның анықтауышы -1 шамасына тең.

Қосымша есептің жауабы

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Көбейтінді бірлік матрицаға тең, сондықтан табылған матрица кері матрица болады.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Квадрат матрицаның керілену мен анықтауышы қалай байланысады?
2. Кері матрица неліктен жалғыз?
3. Толықтауыштардан одақтас матрицаны қалай алады?
4. Гаусс-Жордан әдісінде оң жақта неліктен кері матрица алынады?
5. Гаусс-Жордан әдісі Гаусстың тура жүрісінен несімен ерекшеленеді?
6. XA = B теңдеуін шешкенде кері матрицаға қай жақтан көбейту керек?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.