Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

4-дәріс

Матрицалар мен анықтауыштар

Матрицаларға амалдар қолдану және олардың қасиеттері
Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. САТЖ және матрицалық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: матрицаларға негізгі амалдарды қолдану және екінші, үшінші ретті анықтауыштарды есептеу.

Матрицалық амалдар

Матрицаның өлшемі мен элементтері.
Қосу және санға көбейту.
Көбейтінді және транспонирлеу.

Анықтауыштар

Екінші ретті анықтауыш.
Геометриялық мағынасы.
Үшінші ретті анықтауыш және Саррюс ережесі.

Өлшемдердің үйлесу шарттары мен көбейткіштердің ретіне ерекше назар аударылады.

Матрица және оның элементтері

Өлшемі $m \times n$ болатын матрица m жол мен n бағаннан тұратын тікбұрышты кесте болады.

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

i индексі жолды, j индексі бағанды көрсетеді. Мысалда $a_{21} = -1$, $a_{23} = 4$, ал өлшемі 2×3 болады.

Бұл дәрісте матрица элементтері $\mathbb{R}$ немесе $\mathbb{C}$ жиынынан алынады.

Квадрат, нөлдік және бірлік матрицалар

Квадрат матрица

Жолдар саны бағандар санына тең. Өлшемі $n \times n$ болса, оны n-ші ретті матрица деп атайды.

Нөлдік матрица

Барлық элементтері нөлге тең. Нөлдік матрицаның өлшемі кез келген болуы мүмкін.

Бірлік матрица

Бас диагоналінде бірліктер, ал одан тыс жерде нөлдер тұрады.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагональ матрицаның бас диагоналінен тыс элементтері нөлге тең. Бір жолдан немесе бір бағаннан тұратын кесте де матрица болады.

Матрицалардың теңдігі және оларды қосу

Матрицалардың өлшемдері бірдей және сәйкес элементтері тең болса, олар тең болады. Өлшемдері бірдей матрицаларды қосуға болады.

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Өлшемдері әртүрлі матрицалардың қосындысы анықталмаған.

Санға көбейту және сызықтық комбинация

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha A + \beta B$ өрнегі өлшемдері бірдей матрицалардың сызықтық комбинациясы деп аталады. Азайту $A - B = A + (-1)B$ формуласымен беріледі.

Мысалы, $2A - B$ элементтер бойынша есептеледі: $(2A - B)_{ij} = 2a_{ij} - b_{ij}$.

Қосу мен санға көбейтудің қасиеттері

Формулалардағы барлық матрицалардың өлшемдері бірдей. α және β әріптері сандарды белгілейді.

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \qquad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

Нөлдік матрица үшін $A + 0 = A$. Қарама-қарсы $-A$ матрицасы үшін $A + (-A) = 0$ орындалады.

Матрицаны транспонирлеу

Транспонирлегенде жолдар бағандарға айналады. Индекстердің орындары алмасады.

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A матрицасының өлшемі $m \times n$ болса, A^{T} матрицасының өлшемі $n \times m$ болады.

Матрицаларды көбейту: өлшемдердің үйлесуі

$$A_{m\times p}\,B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

Бірінші матрицаның бағандар саны екінші матрицаның жолдар санына тең болуы керек. Нәтижеде m жол және n баған болады.

$$C=AB,\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

Нәтиженің элементі A матрицасының i-жолы мен B матрицасының j-бағанындағы сәйкес элементтердің көбейтінділерін қосу арқылы табылады.

Тікбұрышты матрицаларды көбейтуге мысал

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Өлшемдер: $(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2$. Мысалы:

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Көбейткіштердің реті нәтижеге әсер етеді

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Екі көбейтінді де анықталған, бірақ $AB \neq BA$. Тікбұрышты матрицалар үшін көбейтінділердің бірі анықталмауы да мүмкін.

Матрицалық көбейтіндінің қасиеттері

Барлық формулаларда матрица өлшемдері үйлеседі деп ұйғарылады.

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC, \qquad (A + B)C = AC + BC$$

$$I_m A = A, \qquad AI_n = A \qquad (A \in \mathbb{R}^{m \times n})$$

Матрицалардың ретін сақтай отырып, көбейтіндідегі жақшаларды өзгертуге болады.
Элементтер бойынша көбейту матрицалық көбейтінді болмайды.

Нөлдік емес матрицалар: нөлдік көбейтінді

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Жалпы жағдайда $AB = 0$ теңдігінен $A = 0$ немесе $B = 0$ шықпайды. Қосымша шарттарсыз ортақ матрицалық көбейткішті қысқартуға болмайды.

Транспонирлеудің қасиеттері

$$(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = A, \qquad (A + B)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}$$

$$(\lambda A)^{\mathsf{T}} = \lambda A^{\mathsf{T}}$$

$$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$$

Соңғы теңдікте көбейткіштердің реті өзгереді. Бұл жолдар мен бағандардың орын алмасуына сәйкес келеді.

Комплекс матрицаны кәдімгі транспонирлеу элементтерді түйіндестіруді қамтымайды.

Сызықтық жүйенің матрицалық жазылуы

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

$$AX = b$$

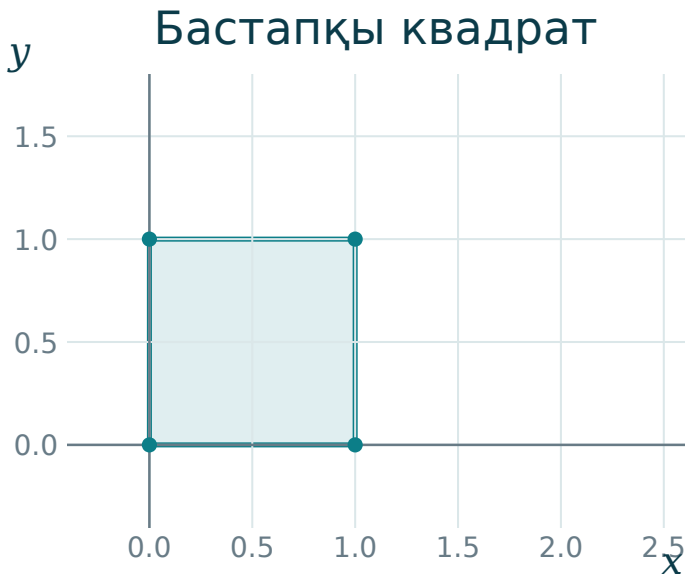
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

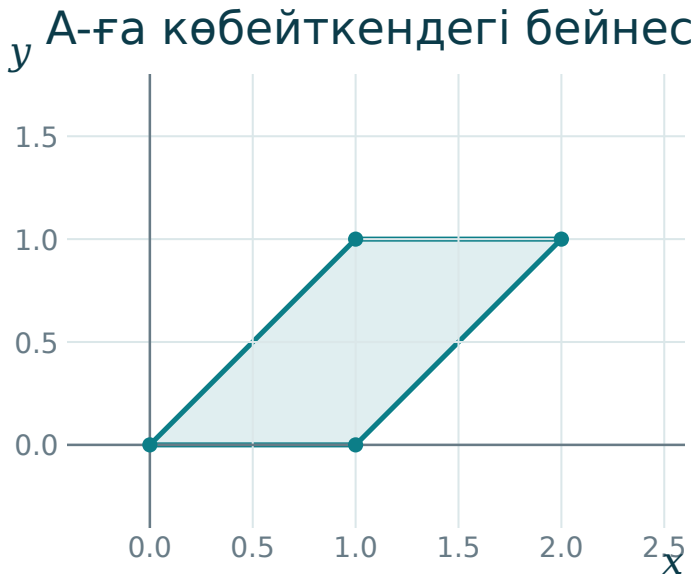
Коэффициенттер матрицасын белгісіздер бағанына көбейткенде жүйенің сол жақтары алынады.

Матрица жазықтықты түрлендіру ретінде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Түрлендіру y-ті сақтап, x координатасына y-ті қосады. Квадрат параллелограмға көшеді.





Екінші ретті анықтауыш

Әрбір екінші ретті квадрат матрицаға мына ереже бойынша сан сәйкестендіреміз:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Анықтауыш сан болады, ал матрица кесте болады. Тікбұрышты матрица үшін кәдімгі анықтауыш анықталмайды.

Екінші ретті анықтауыштарға мысалдар

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$$

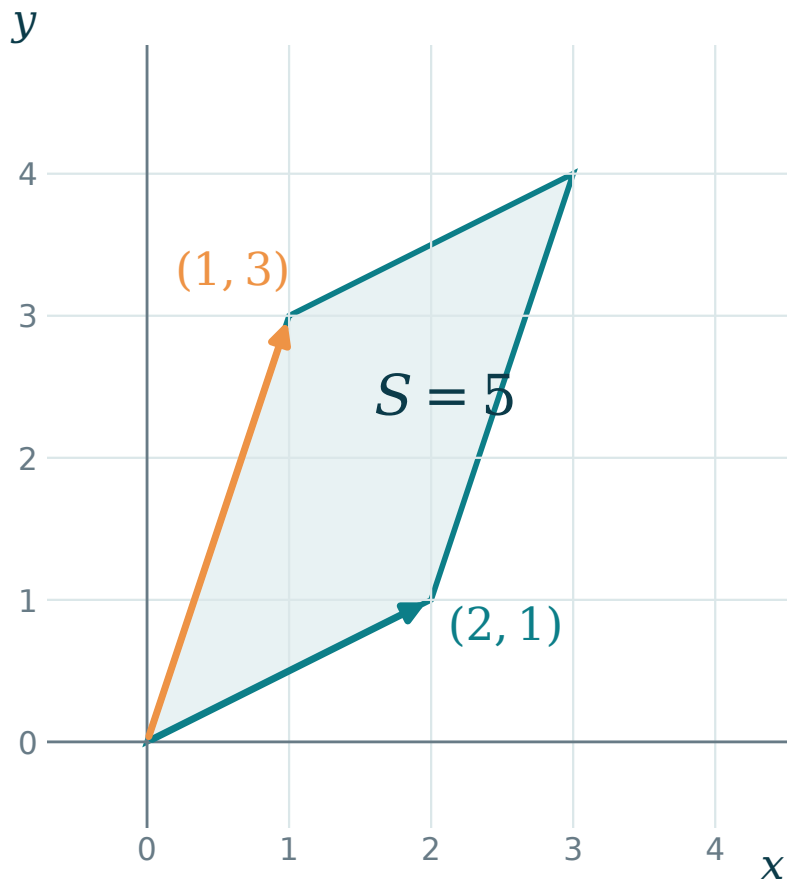
Екінші мысалда бірінші жол екінші жолдан екі есе үлкен. Нөлдік анықтауыштың геометриялық мағынасын аудан арқылы қарастырамыз.

Анықтауыш және параллелограмм ауданы

Екінші ретті нақты матрицаның бағандары жазықтықтағы екі векторды береді.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 5$$

Параллелограмм ауданы $|\det A|$ шамасына тең. Анықтауыштың таңбасы реттелген векторлар жұбының бағдарын ескереді.



Үшінші ретті анықтауыш

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

$$\det A = aek + bfg + cdh - ceg - bdk - afh$$

Формулада үш көбейтінді плюс, үшеуі минус таңбасымен алынады. Әр көбейтіндіге әртүрлі жолдар мен бағандардың элементтері кіреді.

Саррюс ережесі

Формуланы есте сақтау үшін кестенің оң жағына алғашқы екі бағанды көшіріп жазады.

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & k & g & h \end{array}$$

Плюс: $aek + bfg + cdh$ Минус: $ceg + bdk + afh$

Саррюс ережесі тек үшінші ретті анықтауыштарға қолданылады. Төртінші және одан жоғары реттер үшін басқа әдістер қажет.

Үшінші ретті анықтауышқа мысал

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= (1 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 1) \\ &\quad - (3 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 1) \\ &= 16 - (-6 + 0 + 4) = 18. \end{aligned}$$

Алдымен элементтердің өз таңбаларын ескеріп, содан кейін екінші топтың толық қосындысын азайтамыз.

Үшбұрышты матрицалар

Жоғарғы үшбұрышты матрицаның бас диагоналінен төмен нөлдер тұрады. Төменгі үшбұрышты матрицаның диагоналінен жоғары нөлдер тұрады.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$

Формулаға қойғанда тек диагональ элементтердің көбейтіндісі қалады. Келесі дәрісте мұны кез келген рет үшін дәлелдейміз.

Есептеу тәсілін таңдау

Екінші рет	$ad - bc$ формуласы.
Үшінші рет	Саррюс ережесі немесе минорларды енгізгеннен кейін жол бойынша жіктеу.
Үшбұрышты матрица	Диагональ элементтердің көбейтіндісі.
Жоғары реттер	Жол не баған бойынша жіктеу және жол түрлендірулері. Бұл әдістерді 5-дәрісте үйренеміз.

Тарихтан: Кэлидің матрицалар теориясы

1858 жылы Артур Кэли матрицалық алгебраны жүйелі баяндауға арналған A Memoir on the Theory of Matrices еңбегін жариялады.

Матрицаларды дербес объектілер ретінде қарастыру ыңғайлы: оларды қосуға, көбейтуге және сызықтық түрлендірулермен байланыстыруға болады.

Бұл алгебраның ерекшелігі екінші ретті матрицалардан-ақ көрінеді: көбейту реті нәтижеге әсер етеді.

Дереккөз: A. Cayley, Philosophical Transactions of the Royal Society, 148 (1858), 17-37.

Матрицалық амалдарда жиі кездесетін қателер

Өлшемдер	Амал алдында өлшемдер тексеріледі. Қосынды мен көбейтіндінің анықталу шарттары әртүрлі.
Көбейтінді	Көбейтіндінің элементтері «жолды бағанға көбейту» ережесімен табылады.
Транспонирлеу	$(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$ формуласында рет өзгереді.
Анықтауыш	Матрица мен оның анықтауышы әртүрлі объектілер болады. Саррюс ережесі тек 3-ретке қолданылады.

Өзіндік жұмыс

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $A + B$ және A^{T} табыңыз.
2. AB және BA есептеңіз. Нәтижелер бірдей ме?
3. $\det A$ есептеңіз.

4. Есептеңіз: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$. 4-есепте $6 + 2 = 8$ аламыз.
AB және BA көбейтінділері әртүрлі.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. AB көбейтіндісі анықталуы үшін матрицалардың өлшемдері қандай болуы керек?
2. Матрицалық көбейтіндінің жеке элементі қалай есептеледі?
3. Матрицаларды көбейту жалпы жағдайда неліктен ауыстырымды емес?
4. Екі матрицаның көбейтіндісін қалай транспонирлейді?
5. Екінші ретті анықтауыш модулінің геометриялық мағынасы қандай?
6. Саррюс ережесін төртінші ретке неліктен қолдануға болмайды?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

A. Cayley. A Memoir on the Theory of Matrices, 1858.

Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.