Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

10-дәріс

Векторлық алгебра

Геометриялық векторлар және оларға амалдар қолдану
Екі вектордың коллинеарлық критерийлері

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Векторлық алгебра

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: векторларға геометриялық және координаталық амалдар қолдану, коллинеарлықты тексеру.

Геометриялық амалдар

Векторлардың теңдігі және оларды көшіру.
Қосу және азайту.
Санға көбейту.

Координаталық критерийлер

Вектордың компоненттері мен ұзындығы.
Жазықтықтағы және кеңістіктегі коллинеарлық.
Нүктелердің орналасуын тексеру.

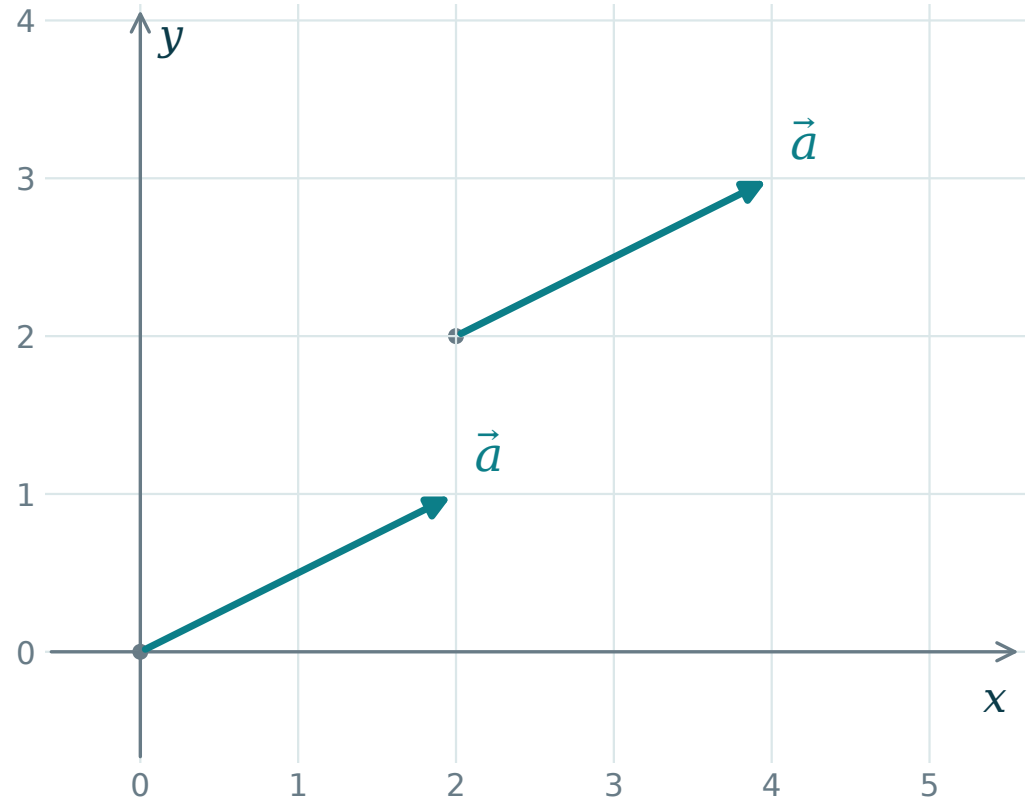
Бұл дәрісте жазықтық пен үшөлшемді кеңістіктегі нақты геометриялық векторларды қарастырамыз.

Бағытталған кесінді және еркін вектор

$\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесіндісінің басы A, ұшы B болады. Оның ұзындығы AB кесіндісінің ұзындығына тең.

Еркін векторды өзіне параллель көшіруге болады. Көшіру кезінде ұзындығы мен бағыты сақталады.

Суреттегі екі бағытталған кесінді бір еркін векторды бейнелейді.



Тең, қарама-қарсы және нөлдік векторлар

Ұзындықтары мен бағыттары бірдей екі нөлдік емес вектор тең болады.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Қарама-қарсы нөлдік емес векторлардың ұзындықтары тең, бағыттары қарама-қарсы болады.

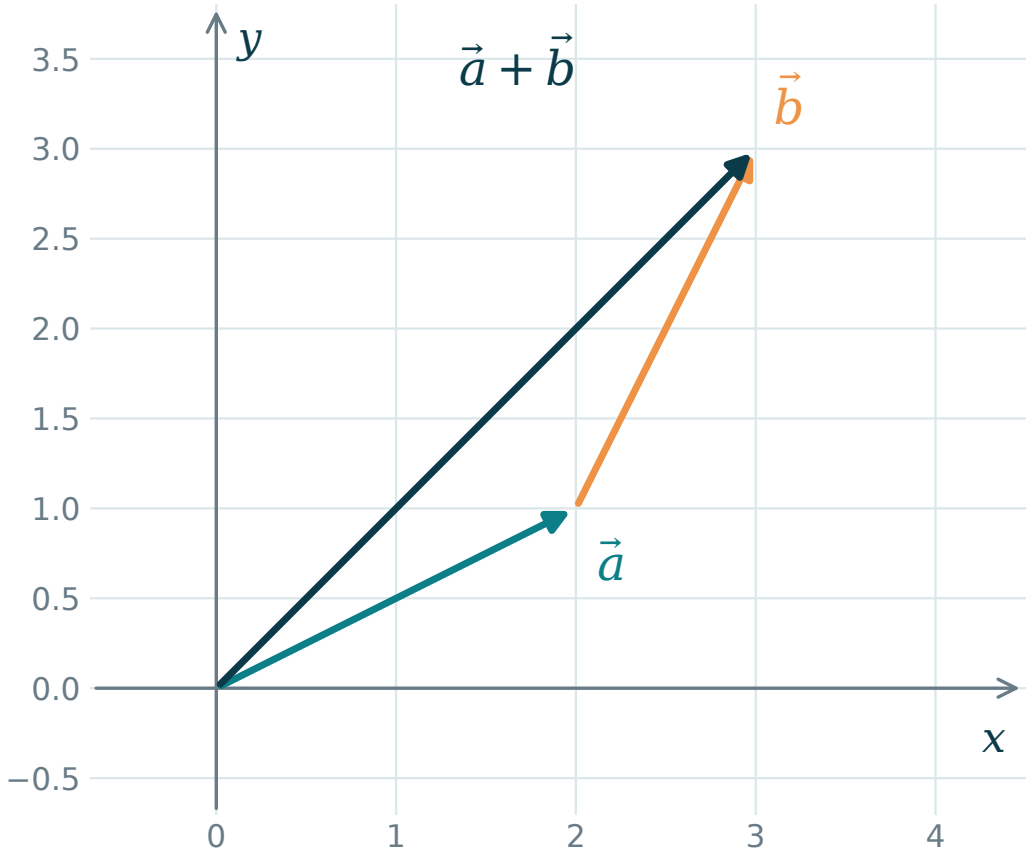
Нөлдік вектордың ұзындығы 0-ге тең. Басы мен ұшы сәйкес келеді, бағыты анықталмаған.

Үшбұрыш ережесі бойынша қосу

Екінші вектордың басын біріншінің ұшымен беттестіреді. Қосынды бірінші вектордың басын екіншінің ұшымен қосады.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Бұл амал екі тізбекті орын ауыстырудың нәтижесін сипаттайды.

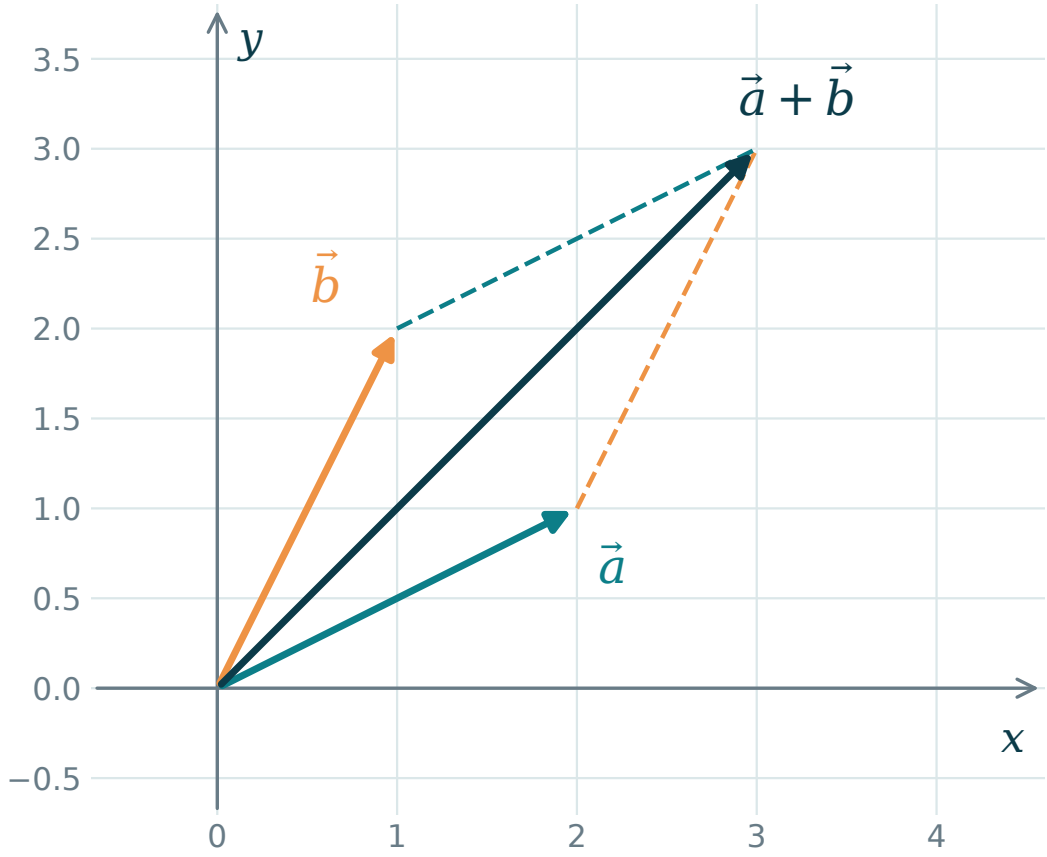


Параллелограмм ережесі бойынша қосу

Екі вектор бір нүктеден салынады. Құрылған параллелограмм диагоналі олардың қосындысы болады.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Геометриялық салу қосудың ауыстырымдылық аксиомасымен үйлеседі.



Бірнеше векторлардың қосындысы

Векторларды бірінен кейін бірін салуға болады. Қорытқы вектор тізбектің басын соңымен қосады.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

Тұйық контур үшін қорытқы орын ауыстыру нөлге тең:

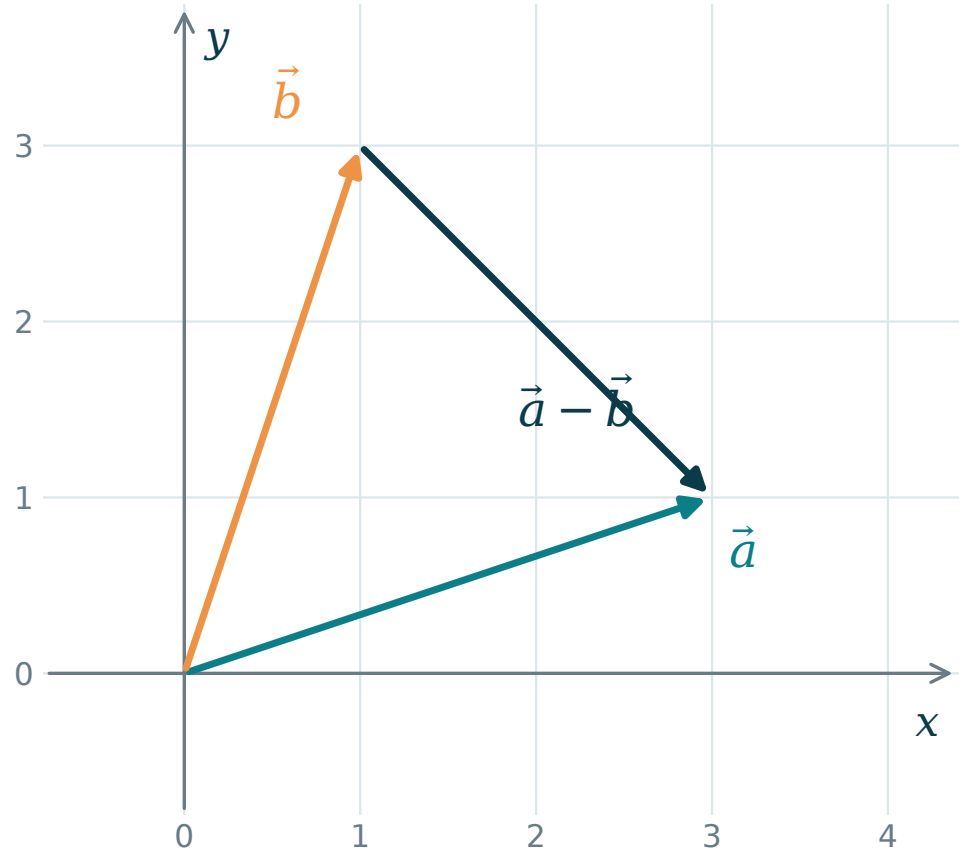
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

Векторларды азайту

Айырма қарама-қарсы вектор арқылы анықталады:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Векторлардың басы ортақ болса, айырма азайтылатын b векторының ұшынан a векторының ұшына бағытталады.

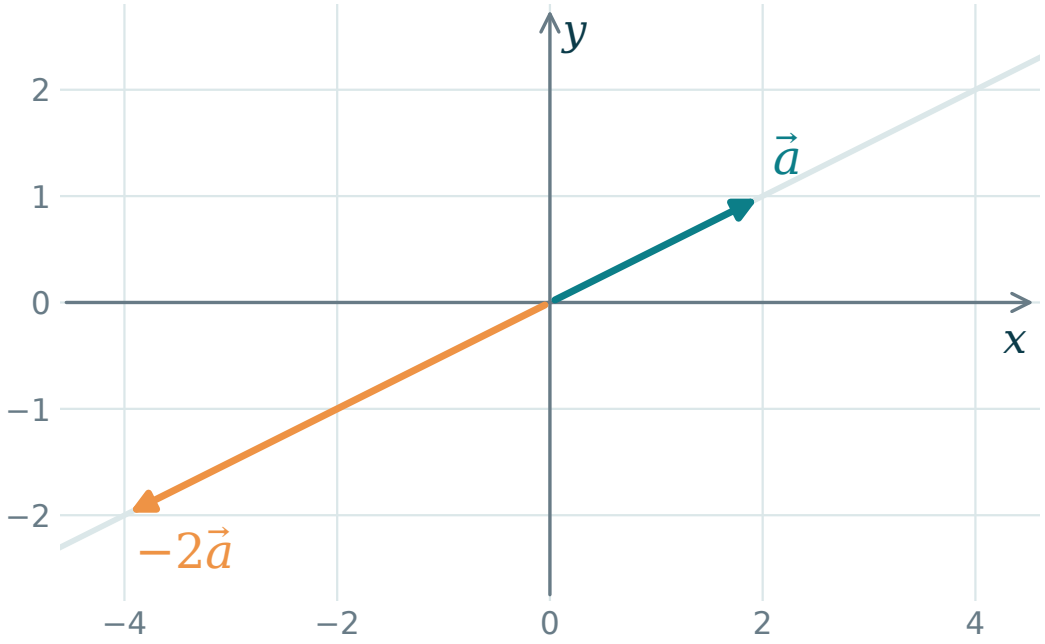


Геометриялық векторды санға көбейту

λ санына көбейткенде ұзындық $|\lambda|$ есе өзгереді:

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$$

Екі вектор да нөлдік емес болса, $\lambda > 0$ кезінде бағыт сақталады, $\lambda < 0$ кезінде қарама-қарсыға өзгереді.



$\lambda = 0$ кезінде нөлдік вектор алынады.

Векторлық амалдардың алгебралық қасиеттері

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}, \qquad \lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$$

Осы амалдармен берілген геометриялық векторлар нақты векторлық кеңістік құрайды.

Координаталар арқылы амалдар орындау

Стандарт базисте $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ және $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Амалдар компоненттер бойынша орындалады:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

Жазықтықта осы ережелер екі координата үшін қолданылады.

Координаталық есептеуге мысал

$$\vec{a} = (1, -2, 3), \qquad \vec{b} = (2, 1, -1)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2, -4, 6) - (2, 1, -1) = (0, -5, 7)$$

Әр координатада алдымен санға көбейтіп, содан кейін азайтамыз. Минус таңбасы екінші вектордың барлық компоненттеріне қатысты.

Жауап сол кеңістіктің векторы болады.

Вектор координаталары: басы мен ұшы

Егер $A = (x_A, y_A, z_A)$ және $B = (x_B, y_B, z_B)$ болса:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (3, -2, 1) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = (2, -4, 1)$$

Әрқашан ұшының координаталарынан басының координаталары азайтылады.

Ұзындық және бірлік вектор

Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінде ұзындық Пифагор теоремасымен табылады:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (\vec{a} \neq \vec{0})$$

$\vec{e}$ векторының ұзындығы 1, бағыты $\vec{a}$ векторымен бірдей. Мысалы, $(3, 4)$ үшін $(3/5, 4/5)$ аламыз.

Екі вектордың коллинеарлығы

Екі нөлдік емес вектор бір түзуде немесе параллель түзулерде жатса, коллинеар деп аталады.

Мәндес тұжырым: ортақ басына көшіргеннен кейін олар бір түзуде жатады.

Нөлдік вектор кез келген векторға коллинеар деп есептеледі. Бұл ретте нөлдік векторға бағыт берілмейді.

Коллинеар векторлардың ұзындықтары әртүрлі болуы мүмкін.

Скаляр көбейткіш арқылы берілетін критерий

Егер $\vec{a} \neq \vec{0}$ болса:

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ коллинеар} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{b} = \lambda \vec{a} \text{ кейбір } \lambda \in \mathbb{R} \text{ үшін}$$

Тура бағытта ұзындықтар қатынасын бағытқа сәйкес таңбамен аламыз. Кері тұжырым санға көбейтудің анықтамасынан шығады.

Тірек вектордың нөлдік емес болуы маңызды. Нөлдік векторы бар жұп жеке тексеріледі.

Коллинеарлық және сызықтық тәуелділік

Геометриялық векторлар жұбының коллинеар болуы оның сызықтық тәуелді болуына мәндес.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Бір вектор нөлдік болса, тәуелділік айқын. Екеуі де нөлдік емес болса, тривиалды емес байланыстан бірін екіншісінің еселігі ретінде өрнектеуге болады.

Осылайша геометриялық шарт 8-дәрістегі ұғыммен байланысады.

Жазықтықтағы координаталық критерий

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ және $\vec{b} = (b_1, b_2)$ үшін коллинеарлық анықтауыштың нөлге тең болуына мәндес:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Анықтауыш нөлден өзге болса, жұп тәуелсіз және жазықтықтың базисін құрайды. Бұл критерий нөлдік векторларды да қамтиды.

Жазықтықтағы коллинеарлыққа мысал

$$\vec{a} = (2, -1), \qquad \vec{b} = (-6, 3)$$

$$2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-6) = 0$$

$$\vec{b} = -3\vec{a}$$

Векторлар коллинеар және қарама-қарсы бағытталған. b ұзындығы a ұзындығынан үш есе үлкен.

Кеңістіктегі координаталық критерий

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ және $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ үшін барлық екінші ретті минорлар бір мезгілде нөлге тең болуы керек:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$$

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0$$

Бұл екі вектордан құрылған матрицаның рангі 1-ден аспайтынына мәндес.

Бір нөлдік минор жеткіліксіз

$$\vec{a} = (1, 1, 0), \qquad \vec{b} = (2, 2, 1)$$

Алғашқы екі координата үшін анықтауыш нөлге тең:

$$1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Бірақ бірінші және үшінші координаталар үшін:

$$1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{векторлар коллинеар емес}$$

Пропорциялар және нөлдік координаталар

Еселікті тексерудің сенімді тәсілі: барлық $b_i = \lambda a_i$ теңдіктерін қанағаттандыратын бір λ санын табу.

$$\vec{a} = (0, 2, -1), \qquad \vec{b} = (0, 6, \mu)$$

$$6 = 2\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3, \qquad \mu = -3$$

Бірінші $0 = \lambda \cdot 0$ теңдігі автоматты түрде орындалады. $0/0$ қатынасы қолданылмайды.

Параметрі бар коллинеарлық шарты

$$\vec{a} = (1, 2), \qquad \vec{b} = (t, 6)$$

$$1 \cdot 6 - 2t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 3$$

Табылған мәнді скаляр көбейткіш арқылы тексереміз:

$$\vec{b} = (3, 6) = 3(1, 2) = 3\vec{a}$$

Бір түзуде жатқан үш нүкте

А мен В әртүрлі болса, A, B, C нүктелерінің бір түзуде жатуы $\overrightarrow{AB}$ және $\overrightarrow{AC}$ векторларының коллинеар болуына мәндес.

$$A = (1, 2, 0), \quad B = (3, -2, 1), \quad C = (5, -6, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (4, -8, 2) = 2\overrightarrow{AB}$$

Демек, нүктелер бір түзуде жатыр. Бұл мысалда В нүктесі А мен С нүктелерінің ортасында орналасқан.

Параллель түзулердің бағыттаушы векторлары

Түзудің бағытын оның кез келген нөлдік емес бағыттаушы векторы арқылы беруге болады.

Екі түзудің нөлдік емес бағыттаушы векторлары коллинеар болса, түзулер параллель немесе беттеседі.

$$(1, 2, -1) \quad \text{және} \quad (-3, -6, 3) = -3(1, 2, -1)$$

Тек бағыт түзудің орнын анықтамайды: оның бойындағы бір нүкте де қажет.

Екі коллинеар емес вектор бойынша жіктеу

Жазықтықтың кез келген екі коллинеар емес векторы оның базисін құрайды. Әр вектор солар бойынша бірмәнді жіктеледі.

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (-1, 1), \quad \vec{w} = (3, 3)$$

$$\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$$

Координаталармен тексеру: 2(2,1) + (-1,1) = (3,3). u, v жұбының нөлдік емес анықтауышы 3-ке тең.

Векторлық теңдеуді шешу

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ берілсін. $3\vec{a} + 2\vec{x} = \vec{b}$ теңдеуін шешейік.

$$2\vec{x} = \vec{b} - 3\vec{a}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$$

Нөлден өзге скалярдың кері санына көбейтуге болады. Мұнда бір векторды екіншісіне бөлу амалы анықталмаған.

Жиі кездесетін қателер

Коллинеарлық	Коллинеар векторлар қарама-қарсы бағытталуы және ұзындықтары әртүрлі болуы мүмкін.
Нөлдік вектор	Ол кез келген векторға коллинеар, бірақ бағыты жоқ.
Пропорциялар	Нөлдік координаталарға бөлуге болмайды. Ортақ скаляр көбейткіші бар теңдіктер тексеріледі.
Кеңістік	Үшөлшемді жағдайда бір нөлдік минор жеткіліксіз.

Өзіндік жұмыс

1. $\vec{a} = (1, -2, 3)$ және $\vec{b} = (2, 1, -1)$ үшін $2\vec{a} - \vec{b}$ табыңыз.

2. μ қандай болғанда $(0, 2, -1)$ және $(0, 6, \mu)$ векторлары коллинеар?

3. A(0,1,2), B(1,3,1), C(3,7,-1) нүктелері бір түзуде жата ма?

4. $(1, 0, 2)$ және $(3, 1, 6)$ векторлары коллинеар ма?

5. Бағыты $(6, 8)$ векторымен бірдей бірлік векторды табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $2\vec{a} - \vec{b} = (0, -5, 7)$.

2. $\mu = -3$, себебі екінші вектор біріншінің үш есесіне тең болуы керек.

3. Иә: $\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 6, -3) = 3\overrightarrow{AB}$.

4. Жоқ: алғашқы екі координата үшін минор $1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 1$ шамасына тең.

5. Ұзындығы 10-ға тең. Бірлік вектор: $(3/5, 4/5)$.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

1. Еркін вектор оның нақты кескінінен несімен ерекшеленеді?
2. Екі вектордың қосындысы мен айырмасы қалай салынады?
3. Скаляр таңбасы вектор бағытына қалай әсер етеді?
4. Жұптың коллинеарлығы мен сызықтық тәуелділігі қалай байланысады?
5. Үшөлшемді кеңістікте қандай минорлар тексеріледі?
6. AB және AC векторларымен үш нүктенің орналасуын қалай тексереді?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Қосымша әдебиеттер

G. Strang. Linear Algebra. MIT OpenCourseWare.

Электрондық курс атауында белсенді сілтеме берілген.