# Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

1-дәріс

# Комплекс сандар

Алгебралық түрі және амалдар
Жазықтықтағы геометриялық кескіні

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Комплекс сандар өрісі

# Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: комплекс санның алгебралық түрін меңгеру және негізгі амалдарды орындауды үйрену.

## Теориялық бөлім

Жорамал бірлік және $\mathbb{C}$ жиыны.
Теңдік, түйіндес сан және модуль.
Арифметикалық амалдардың қасиеттері.

## Практикалық бөлім

Есептеулер және қарапайым теңдеулер.
Комплекс сандарды нүктелер мен векторлар арқылы бейнелеу.
Модульдің геометриялық мағынасы.

Дәрістен кейін: нәтижені $a + bi$ түрінде жазу және оны алгебралық немесе геометриялық тәсілмен тексеру.

# Нақты сандар неліктен жеткіліксіз

Кез келген нақты $x$ үшін $x^2 \geq 0$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $x^2 + 1 = 0$ теңдеуінің $\mathbb{R}$ жиынында шешімі жоқ.

$$i^2 = -1$$

$i$ жорамал бірлігін енгізіп, қосу мен көбейтудің әдеттегі заңдарын сақтаймыз. Сонда мына шешімдер пайда болады:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm i$$

Мысалы, $x^2 + 4 = 0$ теңдеуінің шешімдері $x = \pm 2i$ болады.

# Кардано: теріс сандардан алынған түбірлер

Джероламо Кардано Ars Magna (1545) кітабында қосындысы 10-ға, көбейтіндісі 40-қа тең екі санды табу есебін қарастырады.

$$x + y = 10, \quad xy = 40 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

$$x = 5 + i\sqrt{15}, \qquad y = 5 - i\sqrt{15}$$

$$(5 + i\sqrt{15})(5 - i\sqrt{15}) = 25 + 15 = 40$$

Сұрақ туындады: мұндай өрнектермен мағыналы жұмыс істеу ережелері қандай?

Тарихи дереккөз: T. Gantumur, Complex Numbers, §1 (McGill University).

# Бомбелли: есептеулердегі комплекс сандар

Рафаэль Бомбелли «Алгебра» (1572) еңбегінде $x^3 = 15x + 4$ теңдеуін зерттейді. Кардано формуласында мына өрнектер пайда болады:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Қазіргі белгілеулерде үшінші дәрежелі түбірлер ретінде $2 + i$ және $2 - i$ сандарын алуға болады, себебі:

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i, \qquad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

Олардың қосындысы 4-ке тең және $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$. Комплекс сандармен аралық есептеулер нақты шешімге әкеледі.

Дереккөз: T. Gantumur, Complex Numbers, §1. Тарихи формуладағы түбірлер өзара үйлестіріліп таңдалады.

# Санның қазіргі ұғымының қалыптасуы

| | |
|---|---|
| XVIII ғасыр | Эйлер комплекс сандармен есептеулерді дамытып, $i$ белгілеуін енгізеді. |
| 1799 | Вессель комплекс сандардың геометриялық түсіндірмесін жариялайды. |
| 1806 | Арган комплекс сандарды геометриялық тәсілмен тәуелсіз сипаттайды. |
| 1831 | Гаусс «комплекс сан» терминін және геометриялық модельді қолданады. |
| 1837 | Гамильтон нақты сандар жұптарының арифметикалық теориясын жариялайды. |

Дереккөздер: MacTutor (Wessel, Argand), O. Merino, W. R. Hamilton (1837). Сілтемелер дәріс соңында.

# Комплекс сан және оның алгебралық түрі

Комплекс санның алгебралық түрі:

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad i^2 = -1$$

## Нақты бөлігі

$\mathrm{Re}\, z = a$.
$z = 3 - 2i$ үшін $\mathrm{Re}\, z = 3$ болады.

## Жорамал бөлігі

$\mathrm{Im}\, z = b$ нақты сан болады.
$z = 3 - 2i$ үшін $\mathrm{Im}\, z = -2$.

Егер $b = 0$ болса, $z \in \mathbb{R}$. Егер $a = 0$ және $b \neq 0$ болса, сан таза жорамал сан деп аталады.
$a = b = 0$ кезінде $z = 0$ аламыз.

# Қатаң модель: реттелген жұптар

$\mathbb{C}$ жиынын нақты сандардың $(a, b)$ жұптарының жиыны ретінде анықтауға болады. Амалдар мына формулалармен беріледі:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

$a \in \mathbb{R}$ санын $(a, 0)$ жұбымен сәйкестендіріп, $i = (0, 1)$ деп белгілейміз. Сонда $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, яғни $i^2 = -1$.

$a + bi$ жазуы $(a, b)$ жұбының ыңғайлы белгілеуі болады. Бұл модель комплекс сандардың бар болуын негіздейді.

# Комплекс сандардың теңдігі

$$a + bi = c + di \quad \Longleftrightarrow \quad a = c, \quad b = d$$

Комплекс сандардың тең болуының қажетті және жеткілікті шарты: олардың нақты және жорамал бөліктері сәйкесінше тең.

Мысал. Теңдіктен нақты $x$ және $y$ сандарын табайық:

$$(2x - 1) + (y + 3)i = 5 - 2i$$

$$2x - 1 = 5, \quad y + 3 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x = 3,\ y = -5$$

# Жорамал бірліктің дәрежелері

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i$$

$$i^{n+4} = i^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Дәрежелер 4 периодпен қайталанады. Теріс емес бүтін дәреже көрсеткішін 4-ке бөлгендегі қалдықты табу жеткілікті.

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2 \quad \Longrightarrow \quad i^{2026} = i^2 = -1$$

Тексеру: $i^4 = 1$, сондықтан $i^{4q+r} = (i^4)^q i^r = i^r$.

# Қосу және азайту

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

## Қосу

$$(3-2i)+(-1+5i)$$
$$=(3-1)+(-2+5)i$$
$$=2+3i.$$

## Азайту

$$(3-2i)-(-1+5i)$$
$$=(3+1)+(-2-5)i$$
$$=4-7i.$$

Минус таңбасынан кейінгі жақшаны ашқанда екі қосылғыштың да таңбасы өзгереді.

# Комплекс сандарды көбейту

Үлестірімділік заңы бойынша жақшаларды ашып, $i^2$ орнына $-1$ қоямыз.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bd\,i^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Мысал: $(2+3i)(1-4i) = 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 14 - 5i$.

# Комплекс сандар өрісі және амалдар қасиеттері

Кез келген $z, w, v \in \mathbb{C}$ үшін әдеттегі заңдар орындалады:

$$z + w = w + z, \qquad zw = wz$$

$$(z + w) + v = z + (w + v), \qquad (zw)v = z(wv)$$

$$z(w + v) = zw + zv$$

$0$ нөлі, $1$ бірлігі және $-z$ қарама-қарсы саны бар. Әрбір $z \neq 0$ үшін $z^{-1}$ кері саны бар.

Осы амалдармен берілген $\mathbb{C}$ жиыны өріс құрайды. Нөлге бөлу анықталмаған.

# Түйіндес комплекс сан

$$z = a + bi \quad \Longrightarrow \quad \overline{z} = a - bi$$

$$z + \overline{z} = 2a, \qquad z - \overline{z} = 2bi, \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

Мысал: $z = 2 - 3i$ үшін $\overline{z} = 2 + 3i$ және $z\overline{z} = (2 - 3i)(2 + 3i) = 13$ болады.

# Комплекс санның модулі

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad z = a + bi$$

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \iff z = 0, \qquad z\overline{z} = |z|^2$$

$$|\overline{z}| = |z|, \qquad |zw| = |z|\,|w|$$

Мысал: $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5.$

Ескерту: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ал $|a| + |b|$ әдетте басқа санды береді.

# Комплекс сандарды бөлу

$w = c + di \neq 0$ болсын. Алым мен бөлімді $\overline{w} = c - di$ түйіндес санына көбейтеміз.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

Бөлім $c^2 + d^2 = |w|^2 > 0$. Атап айтқанда, $z \neq 0$ үшін $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.

# Бөлуге мысал және оны тексеру

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{3+3i+2i+2i^2}{2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Жауапты кері амалмен тексереміз:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\right)(1-i) = 3+2i$$

# Белгісізі комплекс сан болатын теңдеу

$(1+i)z = 3 - i$ теңдеуін шешейік. $1+i$ санына бөлуге немесе $z = x + yi$, мұндағы $x, y \in \mathbb{R}$, деп алуға болады.

$$(1+i)(x+yi) = (x-y) + (x+y)i = 3 - i$$

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \quad y = -2$$

$$z = 1 - 2i$$

Тексеру: $(1+i)(1-2i) = 3 - i$.

# $D < 0$ кезіндегі квадрат теңдеулер

$Az^2 + Bz + C = 0$ болсын, мұндағы $A, B, C \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. Егер $D = B^2 - 4AC < 0$ болса:

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm i\sqrt{-D}}{2A}$$

Мысал: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Мұнда $D = 4 - 20 = -16$.

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Түбірлер өзара түйіндес комплекс сандар болады. Олардың қосындысы 2-ге, көбейтіндісі 5-ке тең.

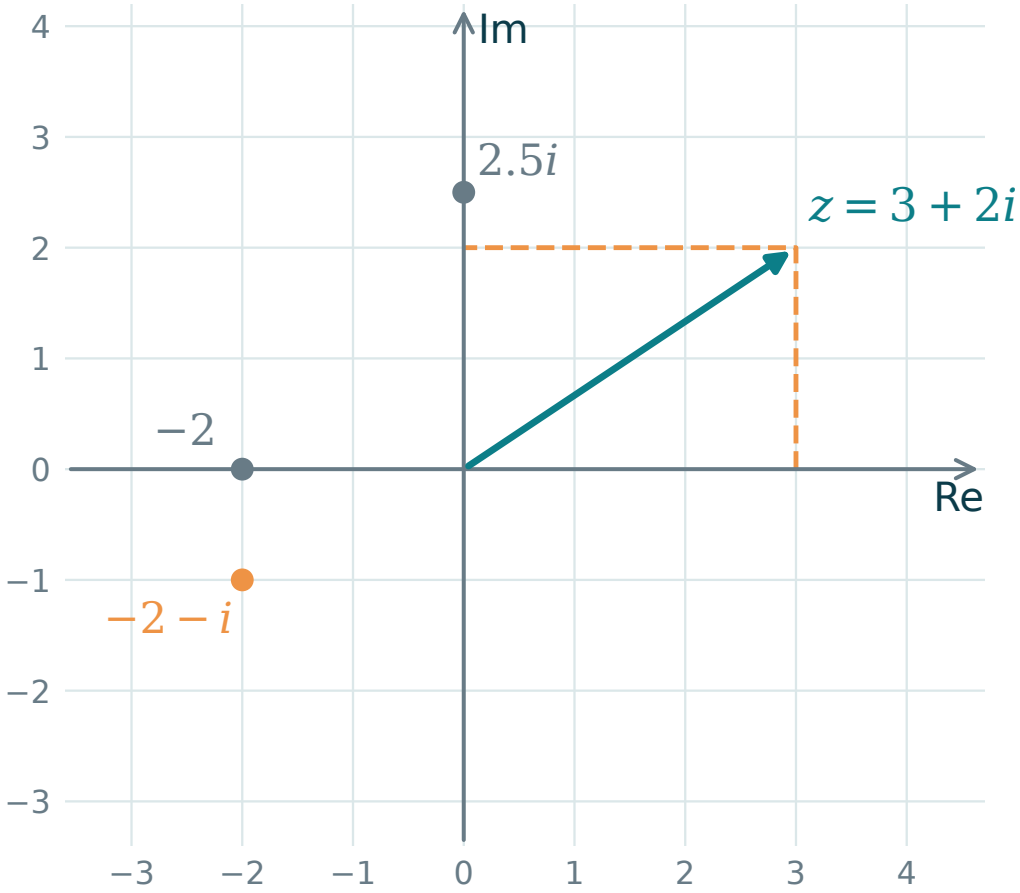
# Комплекс жазықтық

$z = a + bi$ санына $(a, b)$ нүктесі және координаталар басынан шығатын радиус-вектор сәйкес келеді.

$$z = a + bi \longleftrightarrow (a, b)$$

Көлденең ось нақты бөлікке, ал тік ось жорамал бөлікке сәйкес келеді.

0 саны координаталар басында орналасады.



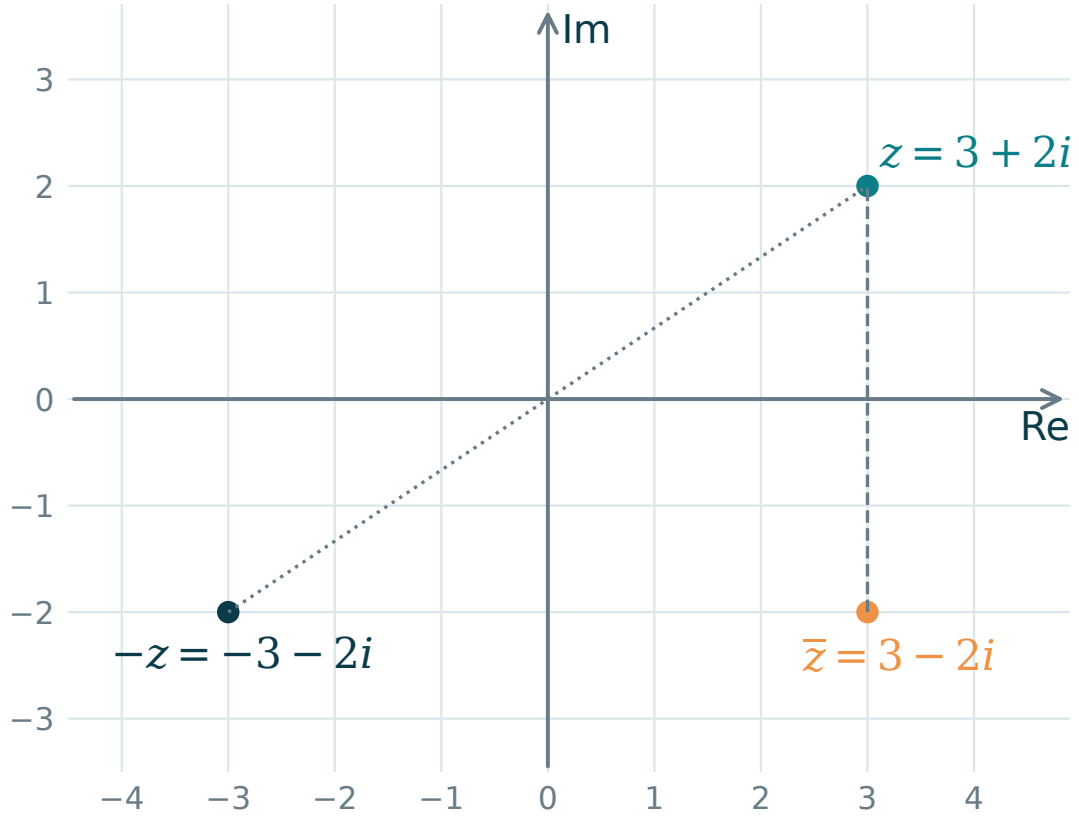
# Түйіндестіру және центрлік симметрия

## Түйіндестіру $z \mapsto \overline{z}$

$(a, b)$ нүктесі $(a, -b)$ нүктесіне көшеді. Бұл нақты оське қатысты симметрия болады.

## $z \mapsto -z$ түрлендіруі

$(a, b)$ нүктесі $(-a, -b)$ нүктесіне көшеді. Бұл координаталар басына қатысты центрлік симметрия болады.



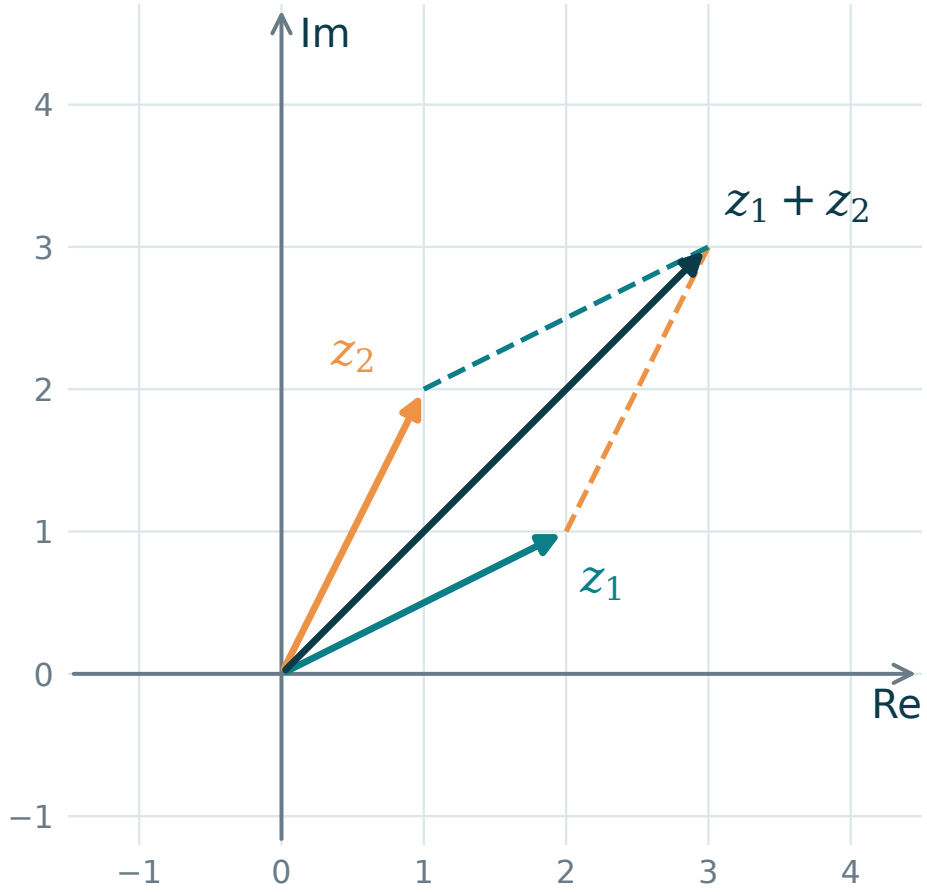
# Параллелограмм ережесі бойынша қосу

Комплекс сандарды қосу оларға сәйкес векторларды қосумен бірдей.

$$z_1 = 2 + i, \qquad z_2 = 1 + 2i$$

$$z_1 + z_2 = 3 + 3i$$

Параллелограмм диагоналі қосындыны береді. $z_1 - z_2$ айырмасы $z_2$ нүктесінен $z_1$ нүктесіне бағытталған векторды береді.



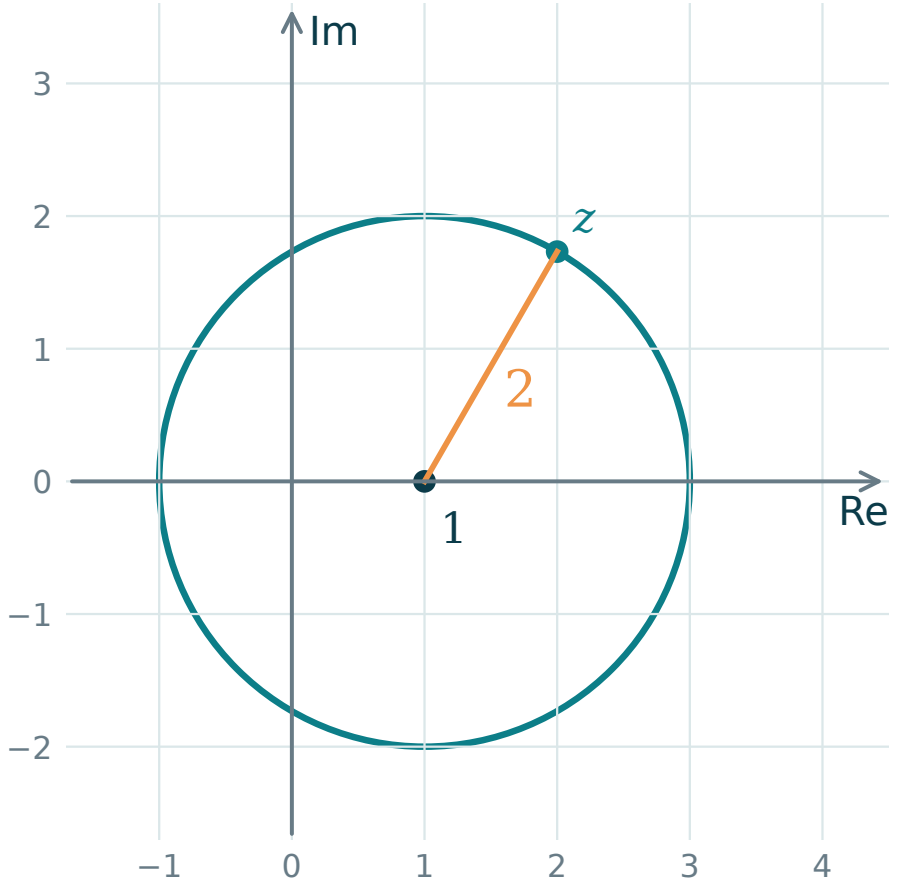
# Модуль: ұзындық және арақашықтық

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Модуль $z$ нүктесінен координаталар басына дейінгі арақашықтыққа тең.

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Мысал: $|z - 1| = 2$ теңдігі центрі $(1, 0)$ нүктесінде орналасқан, радиусы 2-ге тең шеңберді береді.



# Есептеулерде жиі кездесетін қателер

| | |
|---|---|
| Жорамал бөлігі | $z = 4 - 7i$ үшін $\operatorname{Im} z = -7$ болады. $i$ көбейткіші жорамал бөлікке кірмейді. |
| Жорамал бірліктің квадраты | $(bi)^2 = -b^2$, себебі $i^2 = -1$. |
| Түйіндестіру | $a + bi$ санының тек $bi$ қосылғышының таңбасы өзгереді: $\overline{z} = a - bi$. |
| Бөлу | Алым мен бөлім бір түйіндес санға көбейтіледі. |

# Өзіндік жұмыс

1. $z = -3 + 4i$ үшін $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\overline{z}$ және $|z|$ мәндерін табыңыз.

2. $(2 - i)(3 + 2i)$ көбейтіндісін есептеңіз.

3. $\dfrac{4 + i}{2 - i}$ өрнегін алгебралық түрде жазыңыз.

4. $z^2 + 6z + 13 = 0$ теңдеуін шешіңіз.

5. Жазықтықта $z = 2 - 3i$, $\overline{z}$ және $-z$ нүктелерін белгілеңіз.

Әр есептеу үшін тексерудің кем дегенде бір тәсілін жазыңыз.

# Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $\operatorname{Re} z = -3$, $\operatorname{Im} z = 4$, $\overline{z} = -3 - 4i$, $|z| = 5$.

2. $(2 - i)(3 + 2i) = 6 + 4i - 3i - 2i^2 = 8 + i$.

3. $\dfrac{4 + i}{2 - i} = \dfrac{(4 + i)(2 + i)}{5} = \dfrac{7}{5} + \dfrac{6}{5}i$.

4. $D = -16$, сондықтан $z_{1,2} = -3 \pm 2i$.

5. $(2, -3)$, $(2, 3)$ және $(-2, 3)$ нүктелерін аламыз.

# Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

$$z = a + bi, \qquad \overline{z} = a - bi, \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} \quad (w \neq 0)$$

1. Комплекс сандарды жұптар арқылы қатаң анықтауға неліктен болады?
2. Екі комплекс сан қай кезде тең болады?
3. Түйіндестіру бөлу амалын орындауға қалай көмектеседі?
4. Модуль мен сандар айырмасының геометриялық мағынасы қандай?

# Әдебиеттер мен тарихи дереккөздер

## Негізгі әдебиеттер


А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.


## Қосымша әдебиеттер және тарих


T. Gantumur. Complex Numbers. McGill University, 2015.

O. Merino. A Short History of Complex Numbers, 2006.

MacTutor: Caspar Wessel. MacTutor: Jean-Robert Argand.

W. R. Hamilton. Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples, 1837.


Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.