Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

2-дәріс

Тригонометриялық түрі және Муавр формуласы

Комплекс санның аргументі
Дәрежеге шығару және түбірлерді табу

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Комплекс сандар өрісі

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: көбейту, бөлу, бүтін дәрежеге шығару және барлық түбірлерді табу үшін модуль мен аргументті қолдану.

Жаңа ұғымдар

Аргумент және оның бас мәні.
Тригонометриялық түрі.
n-дәрежелі түбірлер.

Негізгі нәтижелер

Муавр формуласы және оның дәлелдемесі.
Дәрежелерді есептеу алгоритмі.
Комплекс сан түбірлерінің геометриясы.

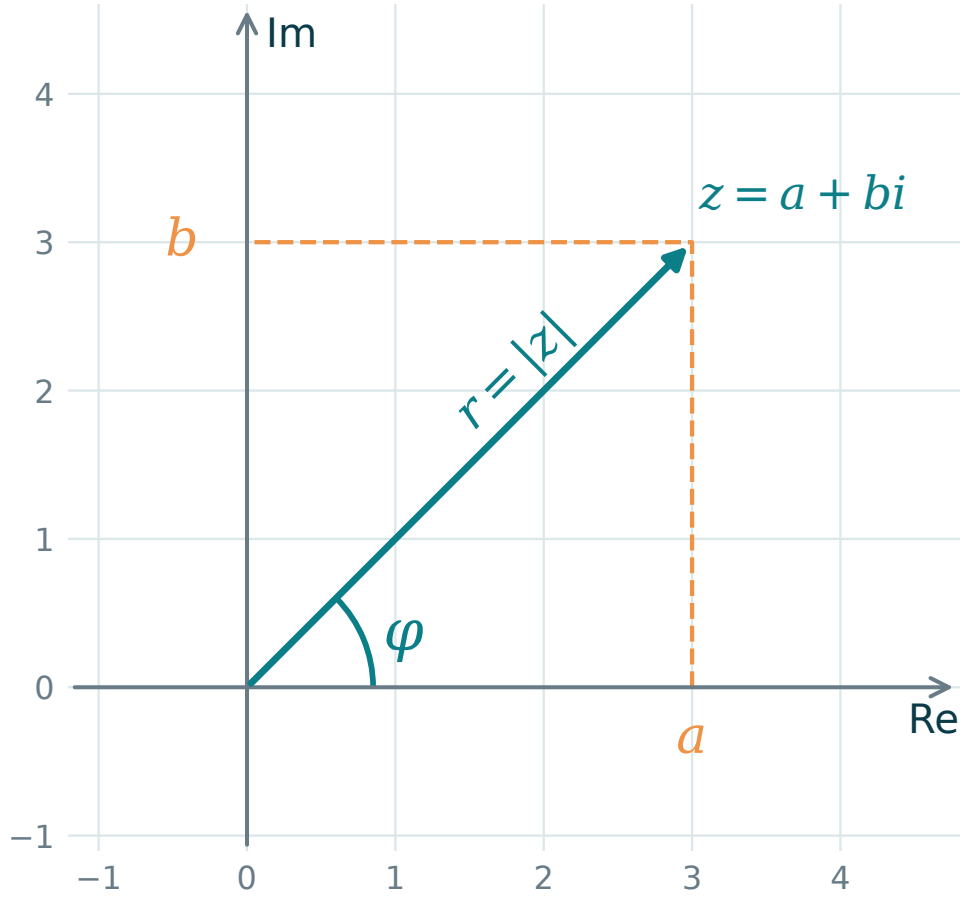
Бастапқы білім: $z = a + bi$, $i^2 = -1$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Комплекс санның полярлық координаталары

$z = a + bi \neq 0$ болсын. Санды $r = |z|$ ұзындығы және нақты осьтің оң бағытынан есептелетін φ бұрышы арқылы беруге болады.

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

Бұрышты есептеудің оң бағыты сағат тіліне қарсы алынады. Бұрыш радианмен өлшенеді.



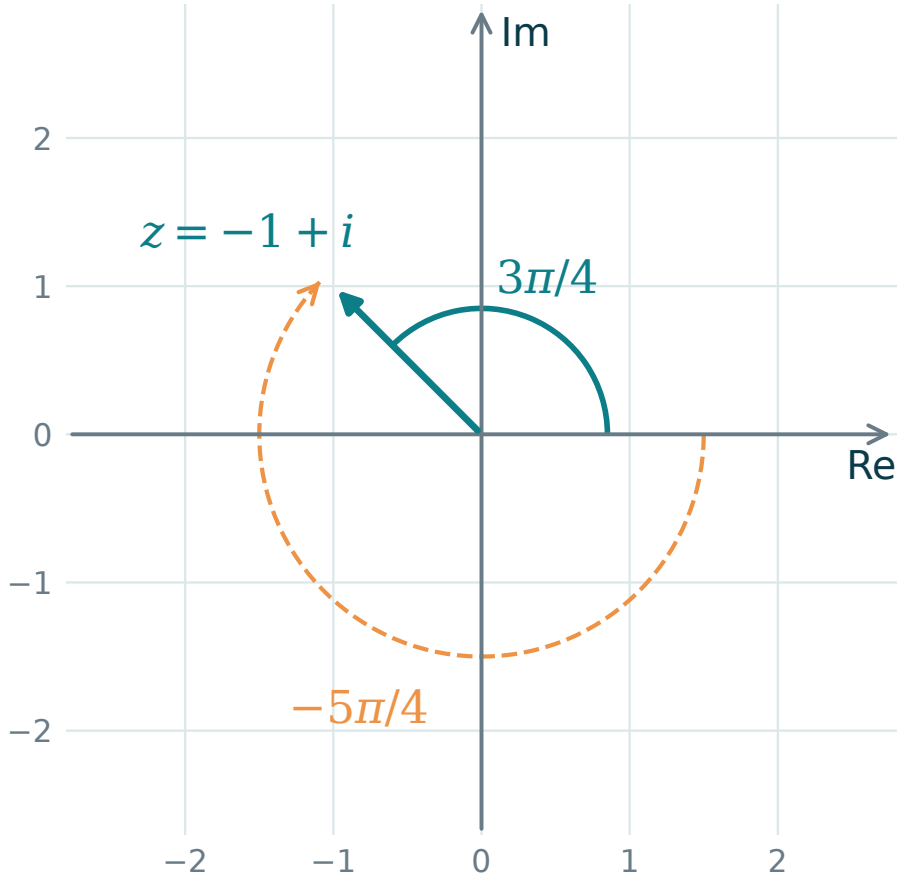
Аргумент және оның бас мәні

$z \neq 0$ санының φ аргументі оның радиус-векторының бағытын береді. Толық айналым бағытты өзгертпейді.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Бұл дәрісте $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ деп аламыз. Аргументтің бас мәні бірмәнді анықталады.

0 санының аргументі анықталмаған.



Координаталар арқылы аргументті анықтау

$a \neq 0$ кезінде $\tan\varphi = b/a$ теңдігі бұрышты π-ге еселі қосылғышқа дейін анықтайды. Сондықтан ширекті міндетті түрде ескереміз.

Орналасуы	Шарттар	Бас мәні $\operatorname{Arg} z$
Оң жақ жарты жазықтық	$a > 0$	$\arctan(b/a)$
II ширек	$a < 0,\ b > 0$	$\arctan(b/a) + \pi$
III ширек	$a < 0,\ b < 0$	$\arctan(b/a) - \pi$
Жорамал ось	$a = 0,\ b \neq 0$	$\pi/2$ ($b > 0$), $-\pi/2$ ($b < 0$)
Теріс жартыось	$a < 0,\ b = 0$	π

Мысал: $z = -1 + i$ үшін $\arctan(-1) = -\pi/4$, бірақ $\operatorname{Arg} z = 3\pi/4$ болады.

Тригонометриялық түрі

$a = r\cos\varphi$ және $b = r\sin\varphi$ өрнектерін $z = a + bi$ алгебралық жазуына қоямыз.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r = |z| > 0$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

Модуль бірмәнді анықталады. Аргументке толық айналымдардың бүтін санын қосқанда комплекс сан өзгермейді.

0 үшін формалды түрде r = 0 деп алуға болады, бірақ оның аргументі анықталмайды.

Тригонометриялық түріне мысалдар

$z = -\sqrt{3} + i \quad r = 2$, II ширек, $\varphi = 5\pi/6$.

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$z = -1 - i \quad r = \sqrt{2}$, III ширек, $\varphi = -3\pi/4$.

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$z = -2i \quad r = 2$, теріс жорамал жартыось.

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Тригонометриялық түрдегі көбейту

$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ және $z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$ болсын. Жақшаларды ашқаннан кейін:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big[(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\big].$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big)$$

Модульдер көбейтіледі, аргументтер қосылады.

Көбейтудің геометриялық мағынасы

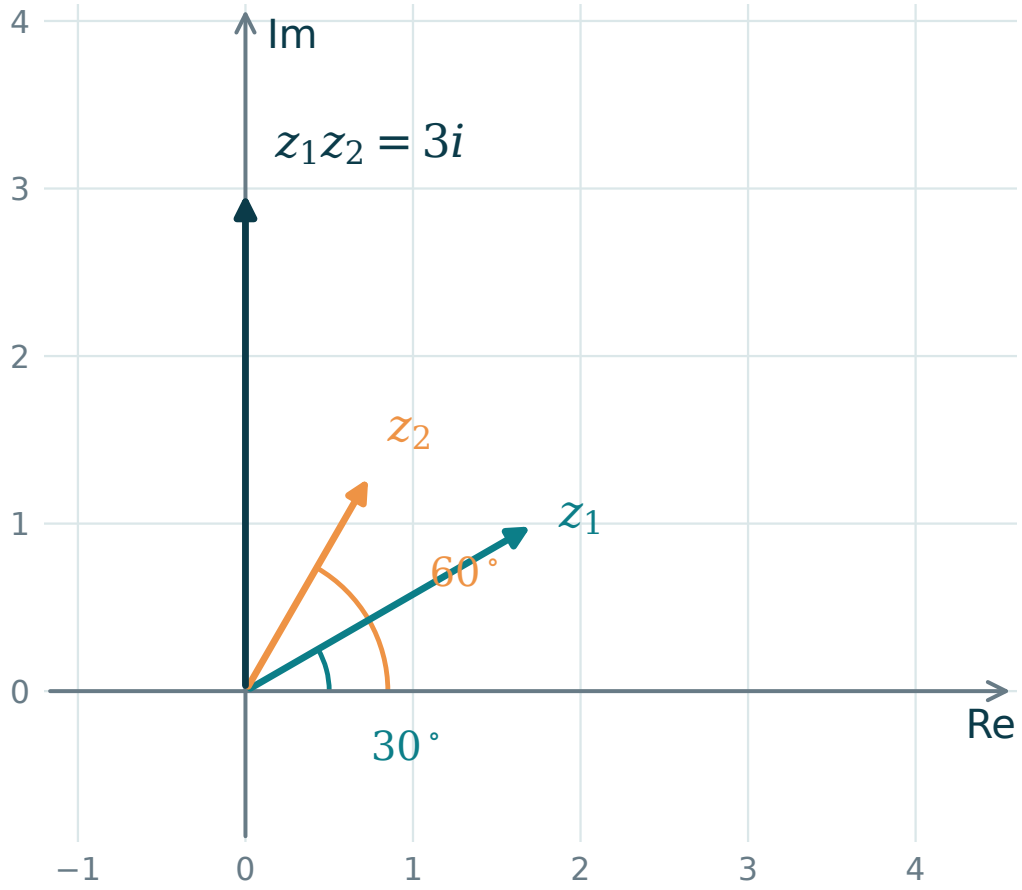
Берілген нөлден өзге санға көбейту векторды бұрып, оның ұзындығын өзгертеді.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$$

Мысалда қорытынды бұрыш 90°-қа, ал ұзындық 3-ке тең.



Тригонометриялық түрдегі бөлу

$z_2 \neq 0$ кезінде модульдер бөлінеді, аргументтер азайтылады:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta))$$

Мысал: $z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6))$,
$z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}\,i} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Муавр формуласы

Бірнеше рет көбейткенде модуль дәрежеге шығарылады, ал аргумент дәреже көрсеткішіне көбейтіледі.

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Мұнда $n \in \mathbb{N}$. Формула жақшаларды қайта-қайта ашпай-ақ үлкен дәрежелерді есептеуге мүмкіндік береді.

Абрахам де Муавр (1667-1754) XVIII ғасырдың басындағы еңбектерінде тригонометрия мен комплекс сандармен есептеулер арасындағы байланысты қарастырды.

Тарихи дереккөз: MacTutor, Abraham de Moivre. Сілтеме дәріс соңында.

Муавр формуласын индукциямен дәлелдеу

$u = \cos\varphi + i\sin\varphi$ деп белгілейік. $n = 1$ кезінде тұжырым айқын.

$u^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ деп ұйғарайық. Сонда:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n u \\ &= (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= \cos((n+1)\varphi) + i\sin((n+1)\varphi). \end{aligned}$$

Соңғы теңдік синус пен косинустың қосу формулаларынан шығады. r^n санына көбейткенде $z = ru$ үшін формуланы аламыз.

Нөлінші және теріс бүтін дәрежелер

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ болсын. Сонда $z^0 = 1$. $m \in \mathbb{N}$ үшін $z^{-m} = 1/z^m$ деп анықтаймыз.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$z = 0$ үшін оң бүтін дәрежелер анықталған. Теріс дәрежелер мен 0^0 өрнегі бұл жерде қарастырылмайды.

Дәрежеге шығару алгоритмі

1. **Модуль** — $z = a + bi \neq 0$ үшін $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ модулін есептеу.
2. **Аргумент** — Ширекті және a мен b таңбаларын ескеріп, φ аргументін табу.
3. **Муавр формуласы** — r^n модулін және $n\varphi$ бұрышын есептеу.
4. **Ықшамдау** — Бұрышты 2π модулі бойынша оған тең бұрышпен алмастырып, синус пен косинусты есептеу.
5. **Жауап** — Қажет болса, $A + Bi$ алгебралық түріне көшу.

Мысал: он екінші дәрежені есептеу

$(1+i)^{12}$ мәнін есептейік. Модулі $\sqrt{2}$-ге, аргументі $\pi/4$-ке тең.

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = -64$$

Алгебралық түрде тексеру:

$$(1+i)^2 = 2i, \qquad (1+i)^{12} = (2i)^6 = 64\,i^6 = -64$$

Мысал: ширек және бұрышты ықшамдау

$(-\sqrt{3}+i)^4$ мәнін есептейік. Сан II ширекте орналасқан, сондықтан $r=2$ және $\varphi = 5\pi/6$.

$$4\varphi = \frac{20\pi}{6} = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

$$(-\sqrt{3}+i)^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$(-\sqrt{3}+i)^4 = -8 - 8\sqrt{3}\,i$$

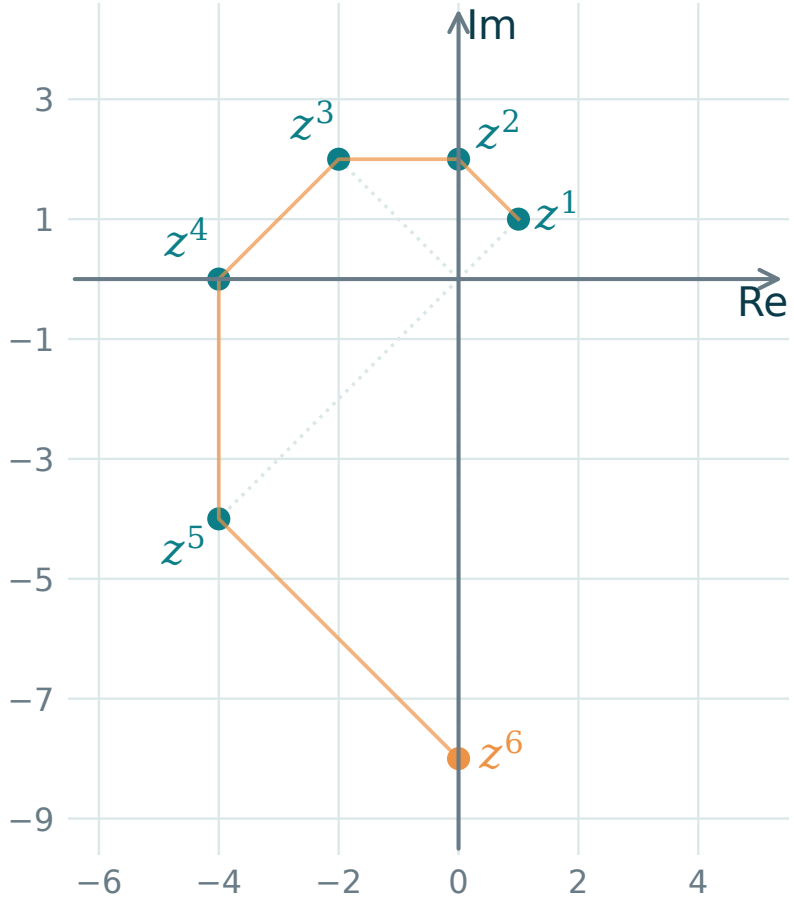
Комплекс сан дәрежелерінің геометриясы

$z = 1 + i$ үшін z санына әр көбейткен сайын ұзындық $\sqrt{2}$ есе, ал бұрыш $\pi/4$-ке артады.

$$|z^n| = (\sqrt{2})^n$$

$$\arg(z^n) = \frac{n\pi}{4} + 2\pi k$$

Суретте алғашқы алты дәреже белгіленген. Кесінділер нүктелердің ретін көрсетеді.



Салдар: үш еселенген бұрыш формулалары

Муавр формуласы бойынша $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$.

Бином формуласы арқылы кубты ашсақ:

$$\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$$

Нақты және жорамал бөліктерді теңестіреміз:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

n-дәрежелі түбірлер: есептің қойылымы

Берілген z санын дәрежеге шығарғанда бір z^n саны алынады. Түбірлерді табуда z саны беріліп, барлық w сандарын табу талап етіледі:

$$w^n = z, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ болсын. Оның түбірлері мына түрде жазылады:

$$w_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Мұнда $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ал $\sqrt[n]{R}$ оң нақты түбір болады.

Түбірлер саны неліктен дәл n-ге тең

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\rho > 0$ болсын. $w^n = z$ теңдігі мен Муавр формуласынан:

$$\rho^n = R, \qquad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\rho = \sqrt[n]{R}, \qquad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

$k = 0, \dots, n-1$ кезінде бұрыштар 2π модулі бойынша әртүрлі. k орнына $k + n$ алсақ, сол түбір қайталанады. Басқа шешімдер жоқ.

Егер $z = 0$ болса, $w^n = 0$ теңдеуінің бір ғана түбірі бар: $w = 0$.

Мысал: 8 санының куб түбірлері

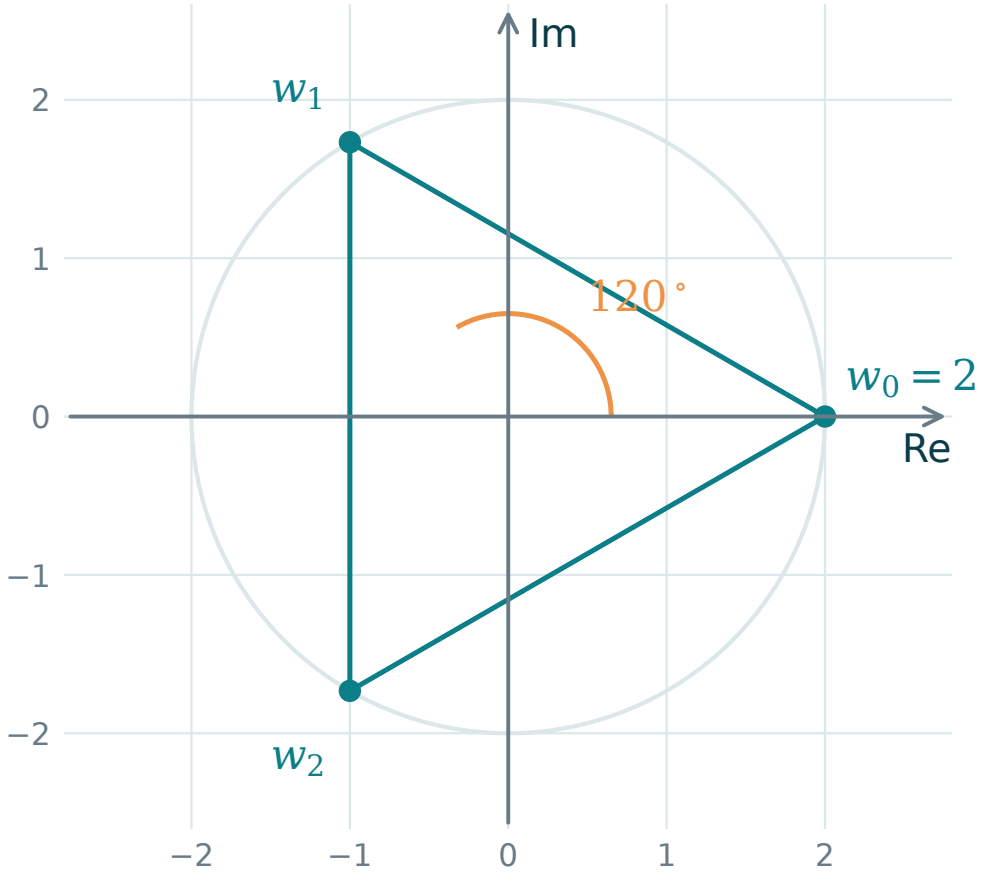
$w^3 = 8$ теңдеуін шешейік. Мұнда $R = 8$, $\varphi = 0$, сондықтан $|w| = 2$.

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = 2,$$

$$w_1 = -1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$



Түбірлер радиусы 2-ге тең шеңберде дұрыс үшбұрыш құрайды.

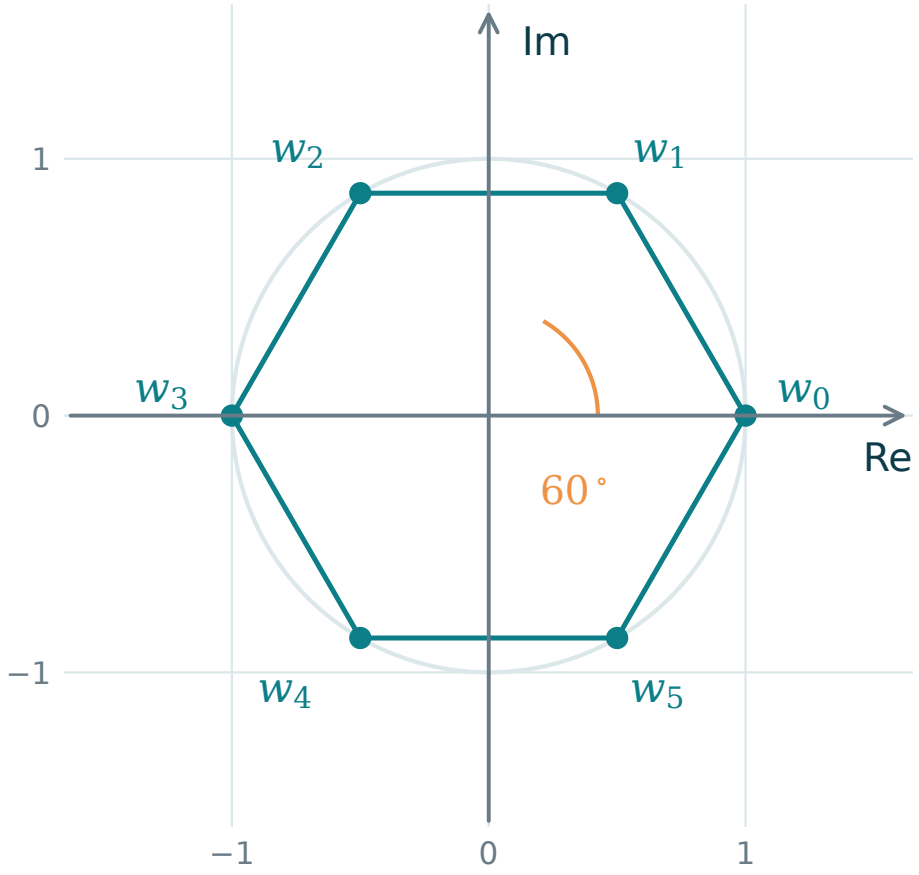
Бірден алынған түбірлер

$w^n = 1$ теңдеуінің шешімдері бірлік шеңберде жатады. Көршілес түбірлер бір-бірінен $2\pi/n$ бұрышына бұру арқылы алынады.

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

$n = 6$ кезінде дұрыс алтыбұрыш аламыз. Егер $\omega = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$ болса, түбірлер:

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5$$

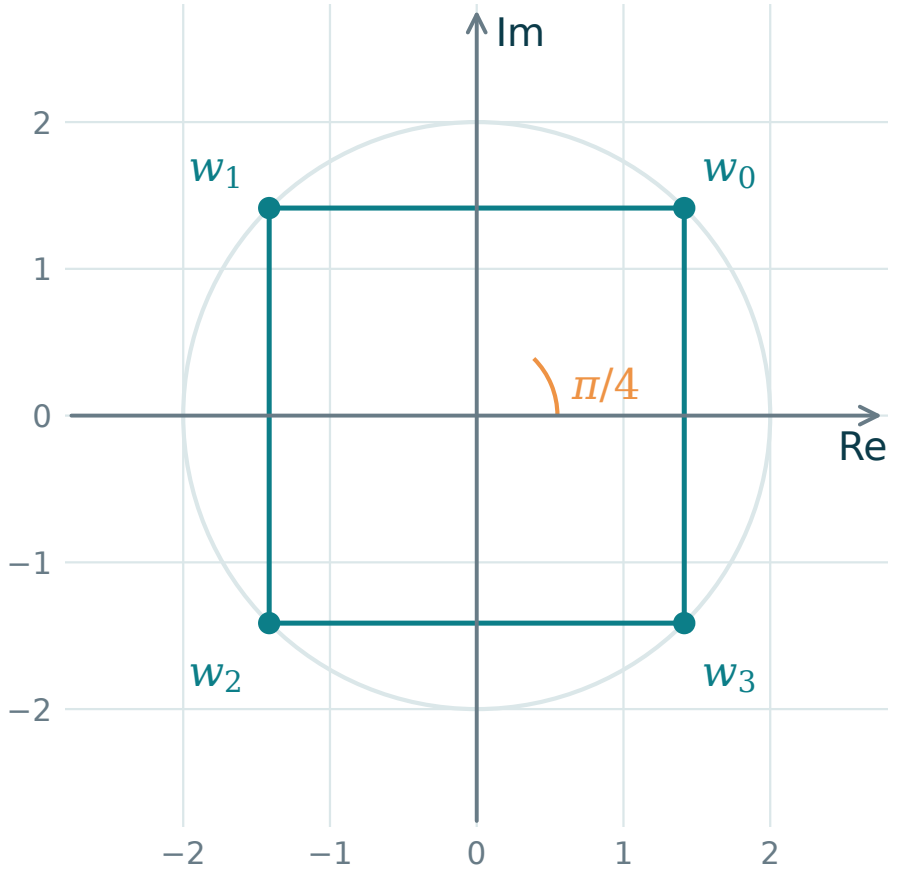


Мысал: $w^4 = -16$ теңдеуі

$w^4 = -16$ теңдеуін шешейік. -16 санының модулі 16-ға, аргументі π-ге тең.

$$|w| = 2, \qquad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ w_1 &= -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\ w_2 &= -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\ w_3 &= \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$



Тексеру: $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 4i$,
демек, $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^4 = -16$.

Жиі қателер: аргумент, дәреже және түбірлер

Ширек	Тек арктангенсті қолдану қате бағыт беруі мүмкін. a мен b таңбаларын тексереміз.
Модуль	Тригонометриялық түрде r модулі теріс емес. $z \neq 0$ үшін $r > 0$ болады.
Дәреже	z^n санының бұрышы $n\varphi$-ге, ал модулі r^n-ге тең.
Барлық түбірлер	$w^n = z \neq 0$ үшін $k = 0, \dots, n-1$ болатын n мән қажет. Бұрыштың толық өрнегі n-ге бөлінеді.

Өзіндік жұмыс

1. $z = -1 + \sqrt{3}\,i$ санын тригонометриялық түрде жазыңыз.

2. $(\sqrt{3} + i)^6$ мәнін есептеңіз.

3. $(1 - i)^{-4}$ мәнін табыңыз.

4. $w^3 = -8$ теңдеуінің барлық шешімдерін тауып, оларды жазықтықта белгілеңіз.

5. Муавр формуласынан $\cos 2\varphi$ және $\sin 2\varphi$ формулаларын қорытып шығарыңыз.

Есептеулерде модульді, аргументті және жауапты тексеру тәсілін көрсетіңіз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $z = 2\big(\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)\big)$.

2. $r = 2$, $\varphi = \pi/6$, сондықтан $z^6 = 64\cos\pi = -64$.

3. $(1-i)^4 = -4$, демек, $(1-i)^{-4} = -1/4$.

4. Модулі 2-ге тең, бұрыштары: $\pi/3$, π, $5\pi/3$.
Түбірлері: $1 + i\sqrt{3}$, -2, $1 - i\sqrt{3}$.

5. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Негізгі нәтижелер мен бақылау сұрақтары

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

1. Аргумент неліктен толық айналымға еселі қосылғышқа дейін анықталады?
2. Көбейту мен бөлу модульді және аргументті қалай өзгертеді?
3. Муавр формуласын Эйлер формуласынсыз қалай дәлелдеуге болады?
4. Нөлден өзге санның неліктен дәл n әртүрлі n-дәрежелі түбірі бар?
5. Табылған түбірлерді және олардың жазықтықтағы орналасуын қалай тексеруге болады?

Әдебиеттер мен қосымша материалдар

Негізгі әдебиеттер

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. 2007.

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.

Қосымша материалдар

T. Gantumur. Complex Numbers. McGill University, 2015.

MacTutor History of Mathematics: Abraham de Moivre.

O. Merino. A Short History of Complex Numbers, 2006.

Электрондық дереккөздердің атауларында белсенді сілтемелер берілген.