# Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

13-дәріс

# Жазықтықтағы және кеңістіктегі түзулер

Теңдеулері және өзара орналасуы
Бұрыштар мен арақашықтықтар

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

4-модуль. Аналитикалық геометрия

# Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: түзудің ыңғайлы теңдеуін таңдау, түзулердің орналасуын зерттеу, бұрыштар мен арақашықтықтарды табу.

## Жазықтықтағы түзу

Жалпы және параметрлік теңдеулер.
Қиылысу және параллельдік.
Бұрыш және түзуге дейінгі арақашықтық.

## Кеңістіктегі түзу

Бағыттаушы вектор.
Қиылысу және айқасу.
Түзу мен жазықтықтың байланысы.

Барлық метриялық формулаларда тікбұрышты декарттық жүйені қолданамыз.

# Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі

Екі айнымалысы бар сызықтық теңдеу айнымалылардың кемінде бір коэффициенті нөлден өзге болса, түзуді береді.

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 > 0$$

$n = (A, B)$ векторы түзуге перпендикуляр. Оны нормаль векторы деп атайды.

Барлық коэффициенттерді бір нөлдік емес санға көбейту сол түзуді береді.

# Нүктесі мен нормалі берілген түзу

$M_0 = (x_0, y_0)$ түзу бойында жатсын, ал $n = (A, B) \neq 0$ оған перпендикуляр болсын.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$\overrightarrow{M_0M}$ векторы түзу бойында жатады және n-ге ортогональ. Сондықтан $n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

Жалпы теңдеудің бос коэффициенті $C = -Ax_0 - By_0$ шамасына тең.

# Түзудің параметрлік теңдеулері

$M_0 = (x_0, y_0)$ нүктесі мен нөлдік емес $s = (p, q)$ бағыттаушы векторы түзуді бірмәнді анықтайды.

$$r = r_0 + ts, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$x = x_0 + pt, \qquad y = y_0 + qt$$

Жалпы теңдеу үшін $s = (-B, A)$ деп алуға болады, себебі $(A, B) \cdot (-B, A) = 0$.

# Теңдеудің бір түрінен екіншісіне көшу

$$M_0 = (1, 2), \qquad s = (2, -1)$$

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 2 - t$$

Екінші теңдіктен $t = 2 - y$. Біріншісіне қоямыз: $x = 1 + 2(2 - y)$.

$$x + 2y - 5 = 0$$

# Жазықтықтағы канондық теңдеу

Бағыттаушы вектордың екі координатасы да нөлдік емес болса, параметрді жою арқылы аламыз:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \qquad pq \neq 0$$

$p = 0$ кезінде түзудің теңдеуі $x = x_0$ болады. $q = 0$ кезінде $y = y_0$ аламыз.

Бағыттаушы вектордың нөлдік координаталары болса, параметрлік теңдеулерді сақтаған ыңғайлы.

# Екі әртүрлі нүкте арқылы өтетін түзу

$M_1 = (x_1, y_1)$ және $M_2 = (x_2, y_2)$ әртүрлі болсын. Бағыттаушы вектор $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ шамасына тең.

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (5, 0)$ үшін $-2(x - 1) - 4(y - 2) = 0$ аламыз.

Ықшамдағаннан кейін: $x + 2y - 5 = 0$. Формула тік түзу үшін де дұрыс.

# Бұрыштық коэффициент

$B \neq 0$ кезінде жалпы теңдеуден y-ті өрнектеуге болады.

$$y = kx + b, \qquad k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$$

Бұрыш $\pi$ модулі бойынша анықталса, $k = \tan\alpha$ коэффициенті Ox осіне көлбеулікті береді.

Тік түзу x=const түрінде беріледі және оның ақырлы бұрыштық коэффициенті жоқ.

# Түзудің кесінділердегі теңдеуі

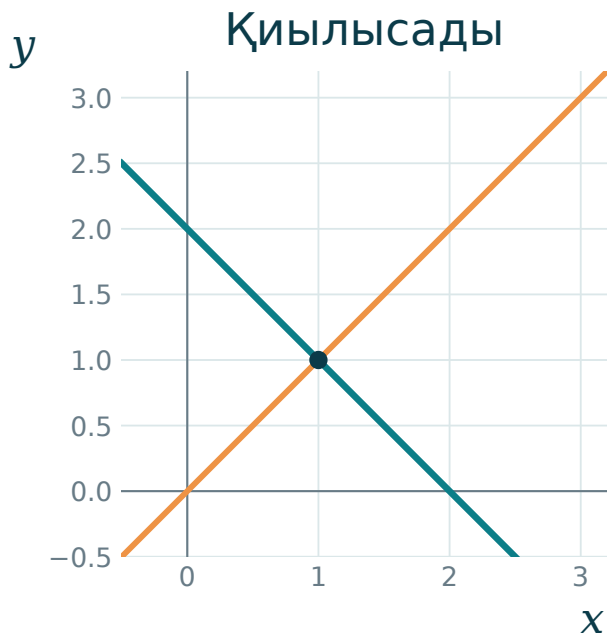
Түзу осьтерді $(a, 0)$ және $(0, b)$ нүктелерінде қисын, мұндағы $a, b \neq 0$.

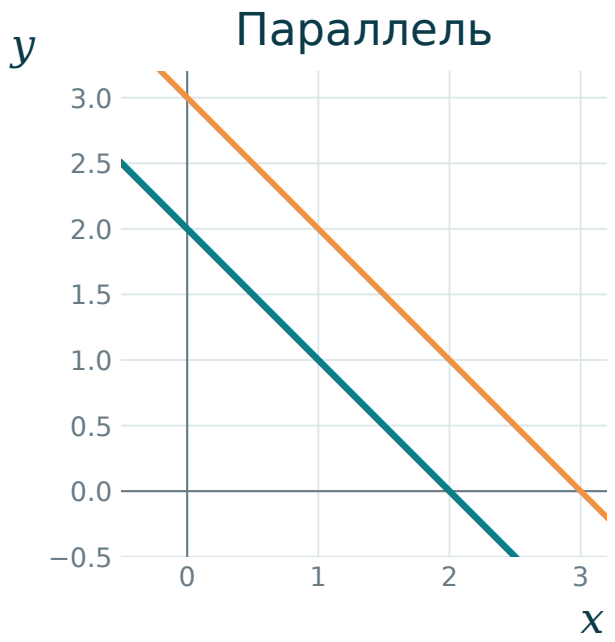
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

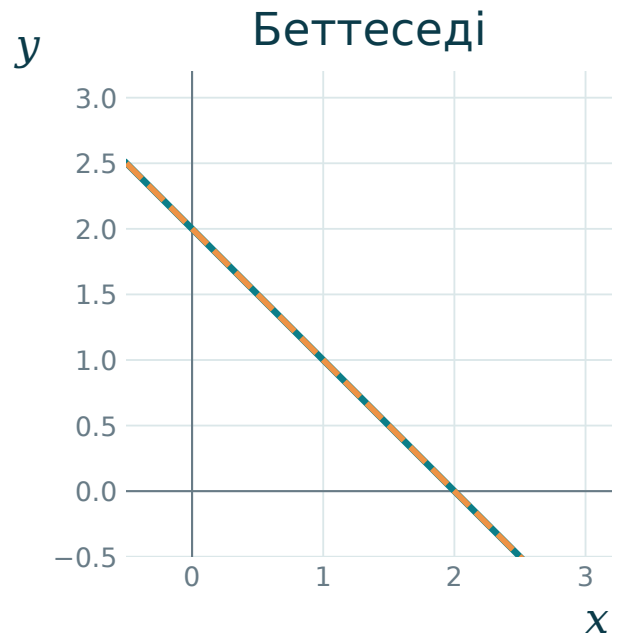
Мысалы, $x/4 + y/2 = 1$ түзуі (4,0) және (0,2) арқылы өтеді.

Координаталар басынан өтетін немесе координаталық оське параллель түзу үшін ақырлы, нөлдік емес a және b бар бұл түр жарамайды.

# Жазықтықтағы түзулердің өзара орналасуы




Жазықтықтағы екі түзудің бір ортақ нүктесі болады, ортақ нүктелері болмайды немесе олар беттеседі.

# Орналасудың алгебралық белгілері

**Қиылысу**

$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Екі теңдеуден тұратын жүйенің жалғыз шешімі бар.

**Параллельдік**

Нормальдар пропорционал: $(A_2, B_2) = \lambda(A_1, B_1)$, бірақ $C_2 \neq \lambda C_1$.

**Беттесу**

Сол $\lambda \neq 0$ үшін $C_2 = \lambda C_1$ теңдігі де орындалады. Барлық коэффициенттер пропорционал.

# Екі түзудің қиылысуына мысал

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Екінші теңдеуден $y = 2x$. Онда $x + 4x = 5$, бұдан $x = 1$ және $y = 2$.

$$M = (1, 2)$$

Жүйенің анықтауышы $-1 - 4 = -5 \neq 0$ шамасына тең.

# Параллель және беттесетін түзулер

$$2x - y + 1 = 0, \qquad 4x - 2y + 3 = 0$$

Айнымалылардың коэффициенттері екі еселенген, ал бос коэффициент екі еселенбеген. Түзулер параллель және әртүрлі.

$$2x - y + 1 = 0, \qquad 4x - 2y + 2 = 0$$

Екінші жұпта барлық коэффициенттер екі еселенген. Теңдеулер бір түзуді береді.

# Түзулер арасындағы кіші бұрыш

Түзулер арасындағы $0 \le \varphi \le \pi/2$ бұрышы олардың нормальдары немесе бағыттаушы векторлары арқылы табылады.

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Модуль нормаль бағытын қарама-қарсыға ауыстырғанда түзудің өзгермейтінін ескереді.

Параллель түзулердің кіші бұрышы нөлге тең.

# Екі түзудің перпендикулярлығы

Екі түзудің перпендикуляр болуы олардың нормаль векторларының перпендикуляр болуына мәндес.

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

$x + 2y - 5 = 0$ және $2x - y = 0$ түзулері үшін $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$ аламыз.

Екі түзудің де ақырлы бұрыштық коэффициенттері болса, критерий $k_1k_2 = -1$ түріне келеді.

# Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық

$P = (x_P, y_P)$ нүктесі және $Ax + By + C = 0$ түзуі үшін, мұндағы $A^2 + B^2 > 0$, аламыз:

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

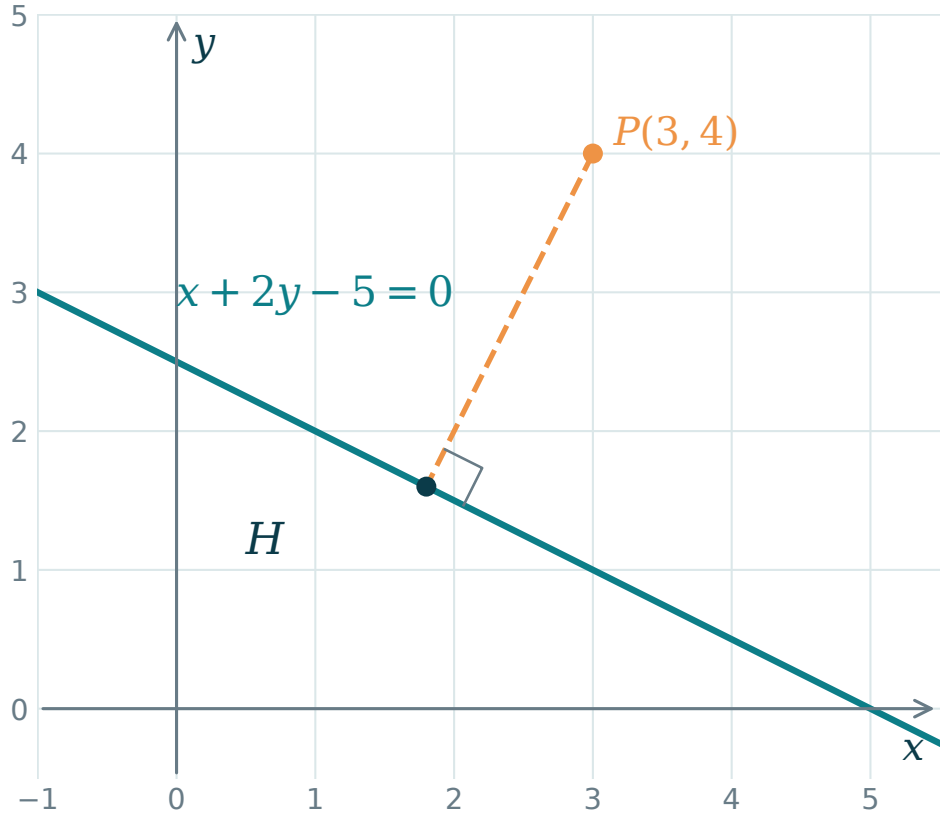
Алым коэффициенттер масштабын ескеріп, нормаль бағытындағы ауытқуды өлшейді.

Түзу теңдеуін нөлдік емес көбейткішке көбейту табылған арақашықтықты өзгертпейді.

# Түзуге дейінгі арақашықтыққа мысал

$P = (3, 4)$ болсын, ал түзу $x + 2y - 5 = 0$ теңдеуімен берілсін.

$$\rho = \frac{|3 + 8 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$




Перпендикулярдың табаны: $H = (9/5, 8/5)$. H нүктесі түзу теңдеуін қанағаттандырады.

# Нүктенің түзуге ортогональ проекциясы

$n = (A, B)$ болсын, P түзу бойында жатуы міндетті емес. H нүктесін P арқылы өтетін нормальдан іздейміз.

$$H = P - \frac{Ax_P + By_P + C}{A^2 + B^2}(A, B)$$

H координаталарын теңдеуге қойғанда нөл алынады, ал $\overrightarrow{PH}$ векторы n-ге коллинеар.

H проекциясы мен |PH| арақашықтығы есептеулерді өзара тексеруге мүмкіндік береді.

# Үшөлшемді кеңістіктегі түзу

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ нүктесі мен $s = (p, q, r) \neq 0$ бағыты түзуді береді.

$$M = M_0 + ts, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$x = x_0 + pt, \qquad y = y_0 + qt, \qquad z = z_0 + rt$$

Үш айнымалысы және нөлдік емес нормалі бар бір сызықтық теңдеу жазықтықты береді. Түзуді беру үшін қосымша шарттар қажет.

# Кеңістіктегі канондық түр

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}\qquad (pqr\neq 0)$$

Бағыттаушы вектордың координатасы нөл болса, түзу нүктесінің сәйкес координатасы тұрақты болады.

$$x=1+2t,\quad y=2-t,\quad z=3$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1},\qquad z=3$$

# Кеңістіктің екі нүктесі арқылы өтетін түзу

Әртүрлі A және B үшін бағыттаушы вектор $s = \overrightarrow{AB}$ шамасына тең.

$$M = A + t(B - A), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Егер $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 1, 1)$ болса, $s = (2, 1, -1)$ және $M = (1, 0, 2) + t(2, 1, -1)$.

t=0 және t=1 параметрлері бастапқы нүктелерді береді.

# Жазықтық теңдеуі

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ арқылы өтетін, нөлдік емес $n = (A, B, C)$ нормалі бар жазықтық ортогональдық шартымен беріледі.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Жақшаларды ашқаннан кейін: $Ax + By + Cz + D = 0$, мұндағы $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Бұл формула түзуді екі жазықтықтың қиылысуы ретінде беруге мүмкіндік береді.

# Үш нүкте арқылы өтетін жазықтық

Бір түзуде жатпайтын A, B, C нүктелері жазықтықты береді. Оның нормалін $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ арқылы табуға болады.

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0), \quad C = (0, 0, 1)$$

$$(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = (1, 1, 1)$$

$$x + y + z = 1$$

# Түзу — жазықтықтардың қиылысуы

$n_1$ және $n_2$ нормальдары коллинеар емес болса, екі жазықтық бағыты $s = n_1 \times n_2$ болатын түзу бойымен қиылысады.

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

$$x = t, \qquad y = t, \qquad z = 1 - 2t$$

(1,1,-2) бағыты (1,1,1) және (1,-1,0) нормальдарының екеуіне де перпендикуляр.

# Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы

**Параллель түзулер** Бағыттары коллинеар. $M_2 - M_1$ сол бағытта жатса, түзулер беттеседі, әйтпесе әртүрлі болады.

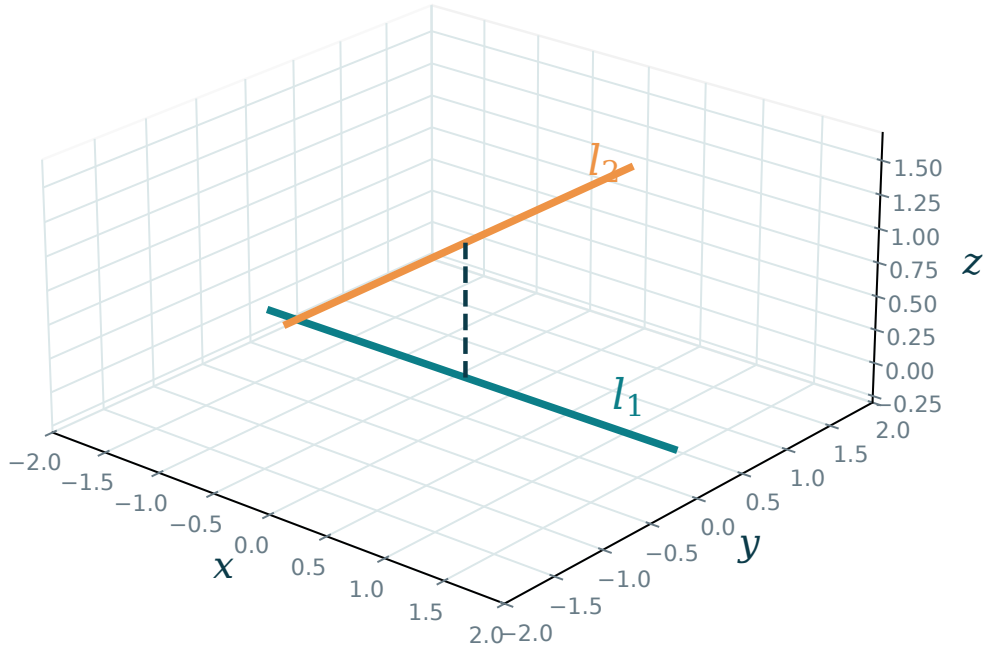
**Қиылысатын түзулер** Бағыттары коллинеар емес және $[M_2 - M_1, s_1, s_2] = 0$. Түзулер бір жазықтықта жатады.

**Айқас түзулер** Бағыттары коллинеар емес және $[M_2 - M_1, s_1, s_2] \neq 0$. Ортақ жазықтығы да, ортақ нүктесі де жоқ.

# Айқас түзулерге мысал

$$l_1 : \ M = (t, 0, 0)$$

$$l_2 : \ M = (0, s, 1)$$




(1,0,0) және (0,1,0) бағыттары коллинеар емес. Бірінші түзуде z=0, екінші түзуде z=1.

Ортақ нүктелері жоқ. Түзулер айқасады.

# Параметрлік түзулердің қиылысуы

$$l_1 : \ (t, t, 0), \qquad l_2 : \ (2 - s, s, 0)$$

Үш координатаның бәрін теңестіреміз. Екі түзудің параметрлерін әртүрлі әріптермен белгілейміз.

$$t = 2 - s, \qquad t = s \quad \Longrightarrow \quad t = s = 1$$

$$M = (1, 1, 0)$$

# Кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрыш

Нөлдік емес $s_1$ және $s_2$ бағыттары үшін кіші бұрыш скалярлық көбейтіндімен анықталады.

$$\cos\varphi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1|\,|s_2|}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Формула айқас түзулерге де қолданылады: олардың бағыттары ортақ басына параллель көшіріледі.

Көбейтіндінің нөлге тең болуы бағыттардың перпендикулярлығын білдіреді, бірақ өздігінен қиылысуды дәлелдемейді.

# Түзу және жазықтық

| | |
|---|---|
| $n \cdot s \neq 0$ | Жалғыз ортақ нүктесі бар. Оны параметрлік координаталарды жазықтық теңдеуіне қою арқылы табады. |
| $n \cdot s = 0$ | Түзудің бастапқы нүктесі жазықтықта жатса, түзу толығымен осы жазықтықта жатады. |
| Параллельдік | $n \cdot s = 0$ болып, бастапқы нүкте жазықтықтан тыс жатса, ортақ нүктелері жоқ. |

# Түзудің жазықтықпен қиылысуы

Түзу $M = t(1,1,1)$ түрінде, ал жазықтық $x + y + z = 3$ теңдеуімен берілсін.

$$t + t + t = 3 \quad \Longrightarrow \quad t = 1$$

Ортақ нүктесі $M = (1,1,1)$ шамасына тең. $n = (1,1,1)$ нормалінің түзу бағытымен көбейтіндісі нөлдік емес.

Параметрді қою есепті бір сызықтық теңдеуге келтіреді.

# Кеңістікте нүкте мен түзудің арақашықтығы

Түзу $M_0$ арқылы $s \neq 0$ бағытымен өтсін. $\overrightarrow{M_0P}$ және s бойынша салынған параллелограмм ауданы $|s|\rho$ шамасына тең.

$$\rho(P, l) = \frac{|(P - M_0) \times s|}{|s|}$$

Ox осі және $P = (0, 3, 4)$ нүктесі үшін $\rho = 5$ аламыз.

Формула тек түзуге тиісті нүктелер үшін нөл береді.

# Кеңістіктегі түзулердің арақашықтығы

Бағыттар коллинеар емес болса, $s_1 \times s_2$ векторы екі түзуге де перпендикуляр.

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(M_2 - M_1) \cdot (s_1 \times s_2)|}{|s_1 \times s_2|}$$

Қиылысатын түзулер үшін алым нөлге тең. Айқас түзулер үшін формула ортақ перпендикулярдың ұзындығын береді.

Параллель түзулер үшін $\rho = |(M_2 - M_1) \times s_1| / |s_1|$ қолданылады.

# Жиі кездесетін қателер

| | |
|---|---|
| Бағыт және нормаль | Жазықтықта олар перпендикуляр. Кеңістікте түзудің нормаль бағыттары тұтас бір жазықтық құрайды. |
| Нөлдік бөлім | Бағыттың координатасы нөл болса, сәйкес координата тұрақтыға тең болатын теңдеу сақталады. |
| Кеңістік | Кеңістікте параллель емес түзулер айқасуы мүмкін. |
| Бұрыштар | Бағыттардың нөлдік скалярлық көбейтіндісі түзулердің ортақ нүктесінің бар болуына кепілдік бермейді. |

# Өзіндік жұмыс

1. A(0,1) және B(2,0) арқылы өтетін түзудің теңдеуін құрыңыз.

2. $x + y = 3$ және $x - y = 1$ түзулерінің қиылысуын табыңыз.

3. O(0,0) нүктесінен $3x + 4y - 10 = 0$ түзуіне дейінгі арақашықтықты табыңыз.

4. (1,0,2) арқылы өтетін, бағыты (2,1,-1) болатын түзуді беріңіз.

5. $(t, 0, 0)$ және $(0, s, 1)$ түзулерінің орналасуын зерттеңіз.

# Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $x + 2y - 2 = 0$.

2. Қиылысу нүктесі (2,1).

3. $\rho = 10/5 = 2$.

4. $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 - t$, мұндағы $t \in \mathbb{R}$.

5. Түзулер айқасады. Олардың арақашықтығы 1-ге тең.

# Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Нормаль, бағыт және түзудің жалпы теңдеуі қалай байланысады?
2. Тік түзу үшін $y=kx+b$ түрі неліктен ыңғайсыз?
3. Қиылысуды, параллельдікті және беттесуді қалай ажыратады?
4. Нүктеден түзуге дейінгі арақашықтық формуласы қалай алынады?
5. Кеңістіктегі екі түзудің компланарлығы қалай тексеріледі?
6. Түзуді екі жазықтықтың қиылысуы ретінде қалай береді?

# Әдебиеттер

## Аналитикалық геометрия бойынша негізгі әдебиеттер

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

## Сызықтық алгебра және есептер

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.