Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

14-дәріс

Екінші ретті сызықтар

Эллипс, гипербола және парабола
Канондық теңдеулер және түрлендірулер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

4-модуль. Аналитикалық геометрия

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: екінші ретті сызықтарды тану, олардың геометриялық элементтерін табу және теңдеулерін канондық түрге келтіру.

Геометриялық сипаттама

Фокустар және арақашықтықтар.
Жарты осьтер және эксцентриситет.
Директриса және асимптоталар.

Теңдеулерді түрлендіру

Толық квадраттарды бөліп алу.
Осьтерді көшіру және бұру.
Азғындалуды тексеру.

Координаталар декарттық. Бұру мен көшіру арақашықтықтарды, бұрыштарды және қисықтың геометриялық түрін сақтайды.

Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі

Екінші ретті сызық x пен y бойынша екінші дәрежелі көпмүшелік теңдеумен беріледі.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A, B, C коэффициенттерінің кемінде біреуі нөлден өзге болуы керек. Bxy қосылғышы координаталық осьтерді байланыстырады.

Азғындалған жағдайлар екі түзуді, бір түзуді, нүктені немесе бос жиынды беруі мүмкін.

Шеңбер

Шеңбер $C = (h, k)$ центрінен тұрақты R арақашықтықта жатқан нүктелерден тұрады.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2, \qquad R > 0$$

$R = 0$ кезінде жиын бір нүктеден тұрады. $(x - h)^2 + (y - k)^2 = -1$ теңдеуінің нақты нүктелері жоқ.

Шеңбер — жарты осьтері тең эллипстің дербес жағдайы.

Эллипстің геометриялық анықтамасы

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ және $a > c \geq 0$ болсын. Эллипс фокустарға дейінгі арақашықтықтарының қосындысы тұрақты M нүктелерінен тұрады.

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$

2a қосындысы фокустар арасындағы 2c арақашықтығынан үлкен. Сондықтан тұйық, азғындалмаған қисық алынады.

c=0 кезінде екі фокус беттесіп, радиусы a болатын шеңбер алынады.

Эллипстің канондық теңдеуі

Фокустарға дейінгі арақашықтықтарды r_1, r_2 деп белгілейік. $r_1 + r_2 = 2a$ және $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$ теңдіктерінен $r_1 = a + cx/a$ шығады.

$$b^2 = a^2 - c^2 > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

r_1 өрнегін арақашықтық квадратына қою канондық түрді береді. Үлкен ось Ox бойымен бағытталған.

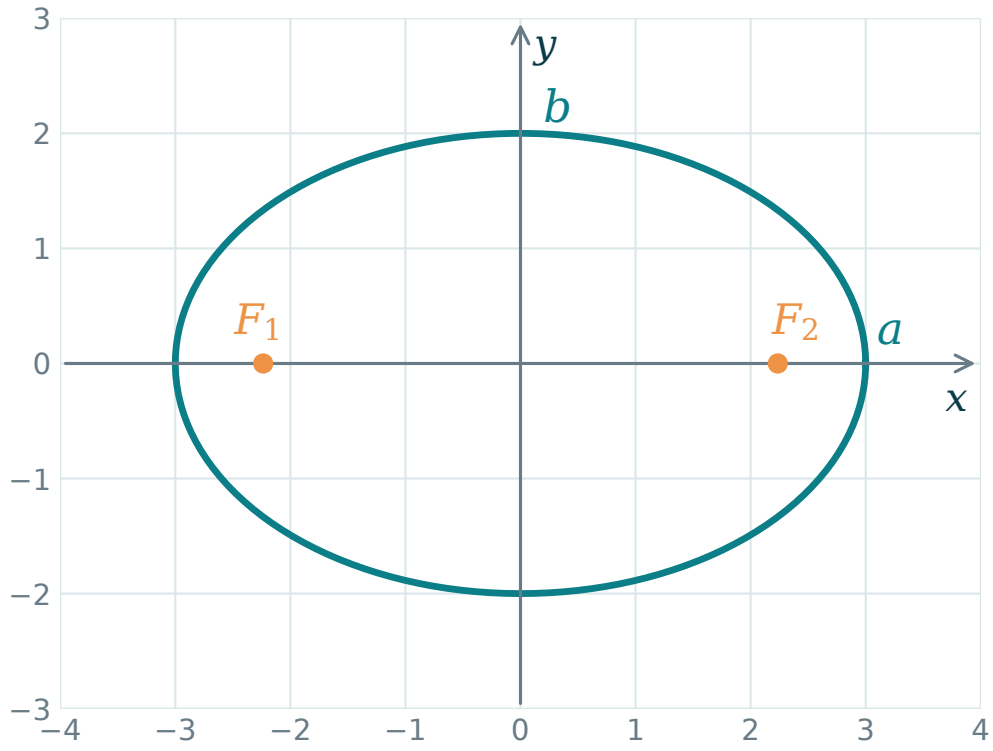
Эллипс және оның фокустары

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Жарты осьтері: $a = 3$, $b = 2$.

Центрден фокусқа дейін: $c = \sqrt{5}$.

Фокустары: $(\pm\sqrt{5}, 0)$.



Эллипстің әрбір нүктесі үшін екі фокусқа дейінгі арақашықтықтар қосындысы 6-ға тең.

Эллипстің геометриялық элементтері

Центр және осьтер	Центрі (0,0). Бас осьтерінің ұзындықтары 2a және 2b шамаларына тең.
Төбелері	Осьтерде: $(\pm a, 0)$ және $(0, \pm b)$.
Фокустары	$F_{1,2} = (\pm c, 0)$, мұндағы $a \geq b$ кезінде $c^2 = a^2 - b^2$.
Эксцентриситет	$e = c/a$, әрі $0 \leq e < 1$. e саны 1-ге жақындаған сайын пішін созылыңқы болады.

Эллипсті параметрлеу

Эллипс нүктелерін бір параметрмен берген ыңғайлы. Синус пен косинус тепе-теңдігі теңдеуді бірден тексереді.

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t, \qquad 0 \le t < 2\pi$$

Қою арқылы $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ аламыз. Параметр толық айналым жасағанда эллипстің барлық нүктелері алынады.

Жарты осьтері әртүрлі болса, t параметрі әдетте радиус-вектордың полярлық бұрышына тең емес.

Центрі көшірілген эллипс

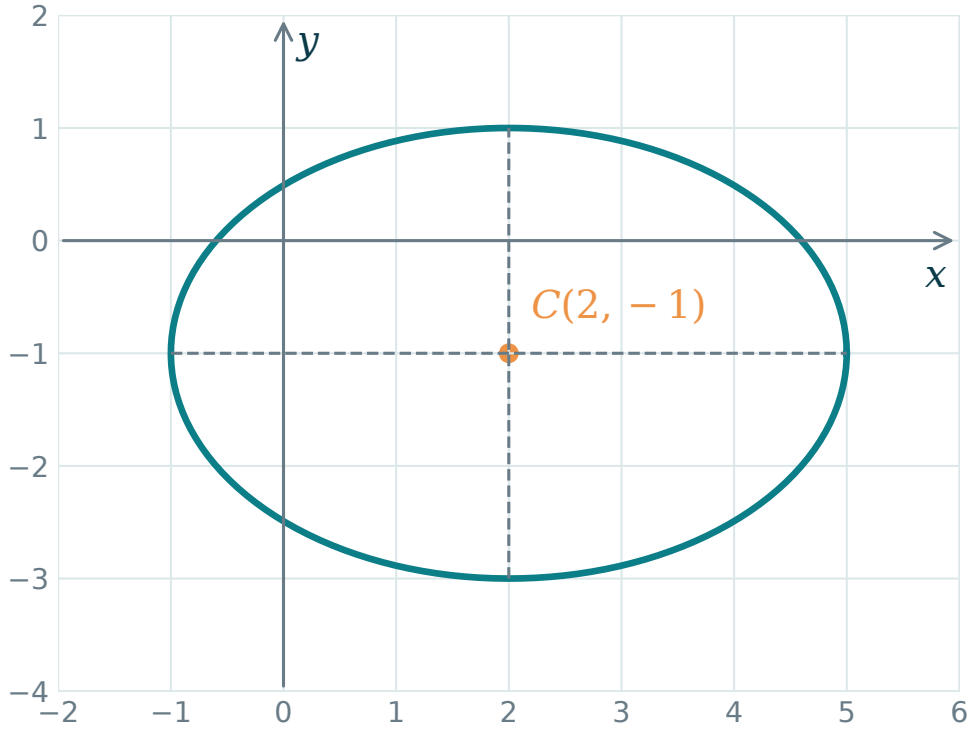
$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

Центрі $C=(2,-1)$.

Жарты осьтері 3 және 2-ге тең.

Бас осьтері координаталық осьтерге параллель.

Центр координаталарының таңбалары x-h және y-k өрнектері арқылы анықталады.



Эллипс үшін квадраттарды бөліп алу

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$$

$$4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Центрді көшіріп, 36-ға бөлгеннен кейін жарты осьтерді тікелей бөлімдерден анықтаймыз.

Гиперболаның геометриялық анықтамасы

Фокустары $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ және $c > a > 0$ болсын. Гипербола арақашықтықтар айырмасының тұрақты модулімен беріледі.

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a$$

Анықтамадан $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ алынады, мұндағы $b^2 = c^2 - a^2 > 0$.

Қисық екі бөлек тармақтан тұрады.

Гипербола және асимптоталар

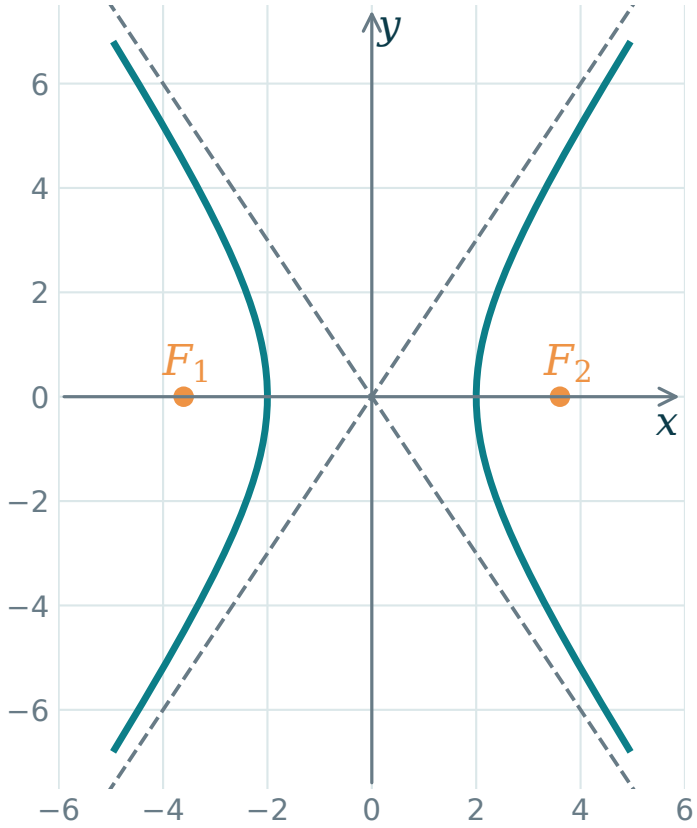
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$.

Төбелері: $(\pm 2, 0)$.

Фокустары: $(\pm\sqrt{13}, 0)$.

$$y = \pm\frac{3}{2}x$$



Гиперболаның геометриялық элементтері

Центр	Координаталар басы. Әр тармақ нақты оське қатысты симметриялы.
Нақты ось	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ үшін Ox бойымен өтеді. Төбелері $(\pm a, 0)$.
Фокустары	$c^2 = a^2 + b^2$, фокустары $(\pm c, 0)$.
Эксцентриситет	$e = c/a > 1$. b саны асимптоталардың көлбеулігін береді, ал $(0, \pm b)$ нүктелері қисықта жатпайды.

Осьі тік орналасқан гипербола

Оң квадрат нақты осьті және екі тармақтың ашылу бағытын анықтайды.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Төбелері $(0, \pm a)$, фокустары $(0, \pm c)$, мұндағы $c^2 = a^2 + b^2$. Асимптоталары: $y = \pm(a/b)x$.

a жарты осі нақты оське сәйкес келеді, ол міндетті түрде Ox осі емес.

Гипербола асимптоталарының пайда болуы

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (|x| \geq a)$$

|x| үлкен болғанда түбір |x|-ке жақын. Сәйкес түзумен айырмасы нөлге ұмтылады.

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Асимптоталар гипербола центрі арқылы өтеді. Олардың нүктелері канондық азғындалмаған гиперболада жатпайды.

Центрі көшірілген гипербола

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

Центрі $C = (-2, 1)$. Нақты осі тік орналасқан. Төбелері: $(-2, 1 \pm 2)$. Фокустары: $(-2, 1 \pm \sqrt{13})$.

$$y - 1 = \pm\frac{2}{3}(x+2)$$

Параболаның геометриялық анықтамасы

Парабола бекітілген F нүктесінен және F арқылы өтпейтін бекітілген d түзуінен бірдей қашықтықта жатқан нүктелерден тұрады.

$$|MF| = \rho(M, d)$$

$y^2 = 2px$, $p > 0$ түрі үшін $F = (p/2, 0)$ және $d: \ x = -p/2$ директрисасын аламыз.

Фокустан директрисаға дейінгі арақашықтық $|p|$ шамасына тең. p таңбасы ашылу бағытын береді.

Парабола теңдеуін қорытып шығару

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = |x+p/2|$$

$$(x-p/2)^2+y^2 = (x+p/2)^2$$

$$y^2 = 2px$$

$p > 0$ кезінде теңдеуден $x \geq 0$ шығады. Төбесі (0,0) нүктесінде, симметрия осі Ox-пен беттеседі.

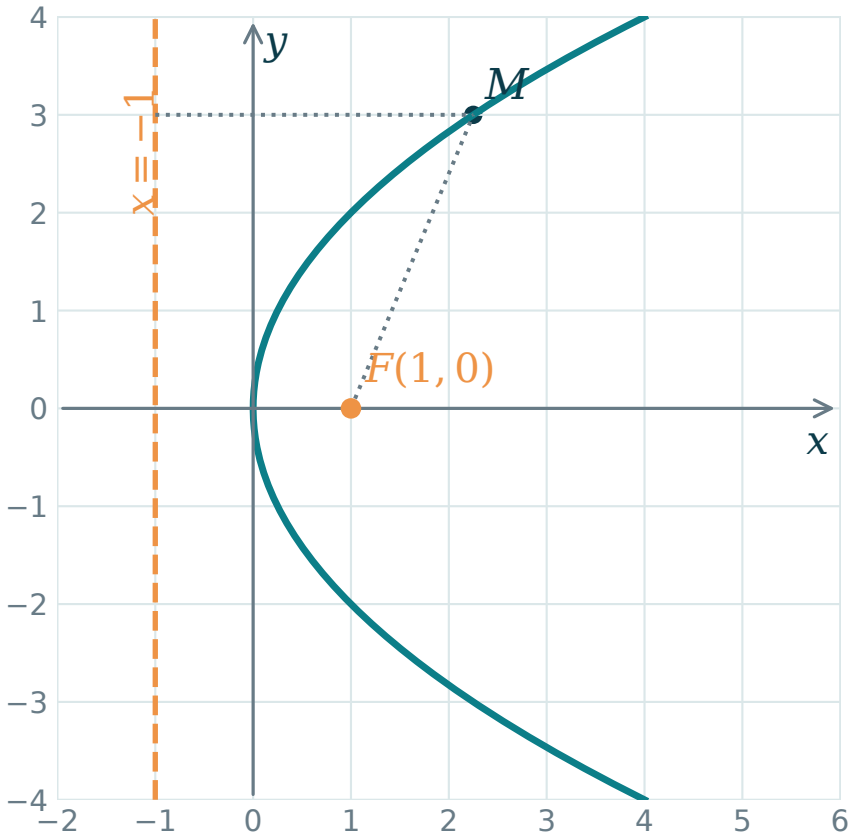
Параболаның фокусы мен директрисасы

$$y^2 = 4x$$

Параметрі $p = 2$.

Фокусы $F = (1, 0)$.

Директрисасы $x = -1$.



М нүктесінен фокусқа дейінгі арақашықтық директрисаға түсірілген перпендикуляр ұзындығына тең.

Парабола осінің бағыты

$$y^2 = 2px, \qquad p \neq 0$$

$p > 0$ кезінде оңға, $p < 0$ кезінде солға ашылады. Фокусы $(p/2, 0)$.

$$x^2 = 2py, \qquad p \neq 0$$

$p > 0$ кезінде жоғары, $p < 0$ кезінде төмен ашылады. Фокусы $(0, p/2)$.

Төбесі көшірілген парабола

Төбесі $V = (h, k)$, осі көлденең. Санақ басын көшіргеннен кейінгі канондық түрі:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

$(y + 1)^2 = 8(x - 2)$ үшін $V = (2, -1)$, $p = 4$, $F = (4, -1)$ және $x = 0$ директрисасын аламыз.

Фокустың жалпы түрі: $(h + p/2, k)$. Директрисасы: $x = h - p/2$.

Парабола үшін квадратты бөліп алу

$$y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$$

$$(y-2)^2 = 8(x-1)$$

Төбесі (1,2), параметрі $p = 4$, фокусы (3,2), директрисасы $x = -1$.

Квадратты бөліп алғанда қосылған тұрақты теңдеудің бос мүшесінде де ескеріледі.

Фокус пен директриса арқылы сипаттау

$$|MF| = e\,\rho(M, d), \qquad e > 0$$

$0 < e < 1$: фокустары әртүрлі эллипс.

$e = 1$: парабола.

$e > 1$: гипербола.

Шеңбердің эксцентриситеті 0-ге тең, ол жеке қарастырылады. Бұл формулада оған фокус пен ақырлы директриса сәйкес келмейді.

Канондық теңдеулерді салыстыру

Эллипс	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Екі оң квадрат, тұйық қисық.
Гипербола	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Квадраттардың таңбалары әртүрлі, екі тармақ.
Парабола	$y^2 = 2px$. Бір айнымалы квадраттық, екіншісі сызықтық түрде кіреді.
Центрді көшіру	x-h және y-k өрнектері сәйкес центрдің немесе төбенің ығысуын береді.

Координаталық осьтерді бұру

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \qquad y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

Тиісті бұру Bxy аралас қосылғышын жояды. Бұрудан кейінгі XY коэффициенті:

$$B' = (C - A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta$$

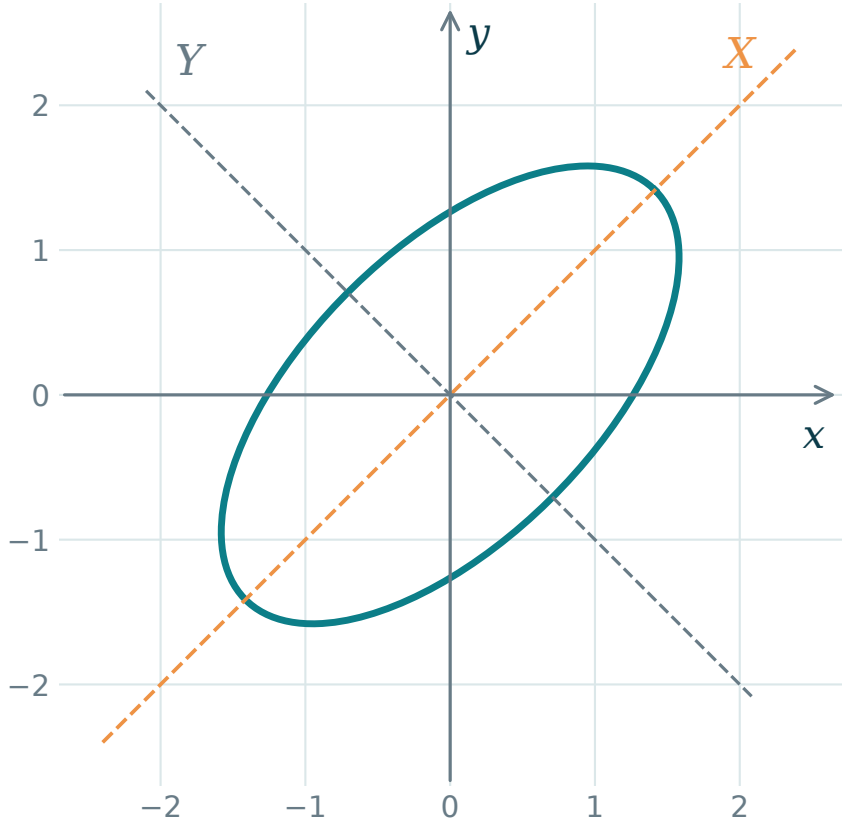
$A \neq C$ кезінде $\tan 2\theta = B/(A - C)$ деп таңдауға болады. Қалған жағдайларда $B' = 0$ теңдігін бөлусіз шешеді.

Осьтері бұрылған эллипске мысал

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$$



Жарты осьтері 2 және 1. Үлкен осі y=x бойымен бағытталған.

Квадраттық бөліктің дискриминанты

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Азғындалмаған нақты қисық үшін дискриминант таңбасы оның түрін анықтайды:

$\Delta < 0$: эллипстік.

$\Delta = 0$: параболалық.

$\Delta > 0$: гиперболалық.

Нақты нүктелердің бар болуы мен азғындалу жеке тексеріледі. Тек Δ таңбасы жеткіліксіз.

Азғындалған жағдайлар

$x^2 + y^2 = 0$

Бір (0,0) нүктесі. Теріс емес қосылғыштар қосындысы тек координаталар басында нөлге айналады.

$x^2 - y^2 = 0$

Қиылысатын екі түзу: y=x және y=-x.

$x^2 - 1 = 0$

Параллель екі түзу: x=1 және x=-1.

$x^2 + y^2 + 1 = 0$

Нақты нүктелердің бос жиыны.

Қисықты тану алгоритмі

1. **Квадраттық бөлік** — Бұру арқылы аралас қосылғышты жойып, квадраттардың коэффициенттерінің таңбаларын анықтау.
2. **Көшіру** — Толық квадраттарды бөліп алып, центрді немесе төбені анықтау.
3. **Нормалау** — Канондық теңдеуді алу. Нақты нүктелердің бар болуын тексеру.
4. **Геометрия** — Жарты осьтерді, фокустарды, асимптоталарды немесе директрисаны табу. Симметрия осін белгілеу.

Жиі кездесетін қателер

Жарты осьтер	Канондық теңдеудің бөлімдері жарты осьтердің квадраттарына тең.
Фокустардың орналасуы	Эллипс үшін $c^2 = a^2 - b^2$, гипербола үшін $c^2 = a^2 + b^2$.
Парабола параметрі	$y^2 = 2px$ түрінде фокус төбеден $\lvert p\rvert/2$ қашықтықта орналасқан.
Дискриминант	Квадраттық бөліктің таңбасы өздігінен нүктені, түзулерді немесе бос жиынды жоққа шығармайды.

Өзіндік жұмыс

1. $x^2/25 + y^2/9 = 1$ эллипсінің фокустарын табыңыз.

2. $x^2/9 - y^2/16 = 1$ гиперболасының фокустары мен асимптоталарын табыңыз.

3. $y^2 = 12x$ параболасының фокусы мен директрисасын табыңыз.

4. Центрі мен радиусын анықтаңыз: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

5. $x^2 + 4y^2 = 0$ теңдеуі қандай жиынды береді?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $c = 4$, фокустары $(\pm 4, 0)$.

2. $c = 5$, фокустары $(\pm 5, 0)$, асимптоталары $y = \pm(4/3)x$.

3. $p = 6$, фокусы (3,0), директрисасы $x = -3$.

4. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$. Центрі (2,-3), радиусы 2.

5. Жалғыз (0,0) нүктесі.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Эллипс, гипербола және парабола арақашықтықтар арқылы қалай беріледі?
2. Эллипс пен гипербола үшін a, b және c қалай байланысады?
3. Эксцентриситет нені білдіреді?
4. Гипербола асимптоталары қалай табылады?
5. Центрді қалай көшіріп, координаталық осьтерді қалай бұрады?
6. Толық жіктеу үшін дискриминант неліктен жеткіліксіз?

Әдебиеттер

Аналитикалық геометрия бойынша негізгі әдебиеттер

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Сызықтық алгебра және есептер

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.