Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия

11-дәріс

Координаталар жүйелері

Аффиндік және декарттық координаталар
Арақашықтықтар және скалярлық көбейтінді

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

4-модуль. Аналитикалық геометрия

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: нүктелер мен векторларды координаталармен беру, кесінділерді бөлу, арақашықтықтарды, бұрыштар мен проекцияларды есептеу.

Координаталық әдіс

Санақ басы және базис.
Аффиндік және декарттық жүйелер.
Нүктелер мен векторлардың координаталары.

Метриялық есептер

Кесіндіні бөлу.
Екі нүктенің арақашықтығы.
Скалярлық көбейтінді және проекциялар.

Бұл дәрісте жазықтық пен кеңістіктің нақты векторларымен жұмыс істейміз.

Аффиндік координаталар жүйесі

Аффиндік жүйе O нүктесі және реттелген $e_1, \dots, e_n$ базисі арқылы беріледі, мұндағы $n = 2$ немесе $n = 3$.

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

$x_1, \dots, x_n$ сандары M нүктесінің координаталары деп аталады. Базис жіктеудің бар болуын және жалғыздығын қамтамасыз етеді.

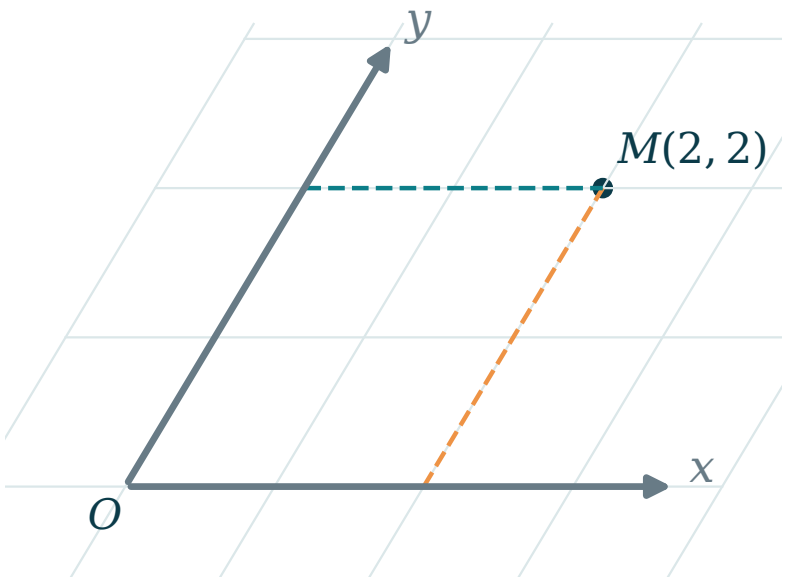
Базис векторларының ұзындықтары әртүрлі, араларындағы бұрыштары тік емес болуы мүмкін.

Нүкте мен вектордың координаталары

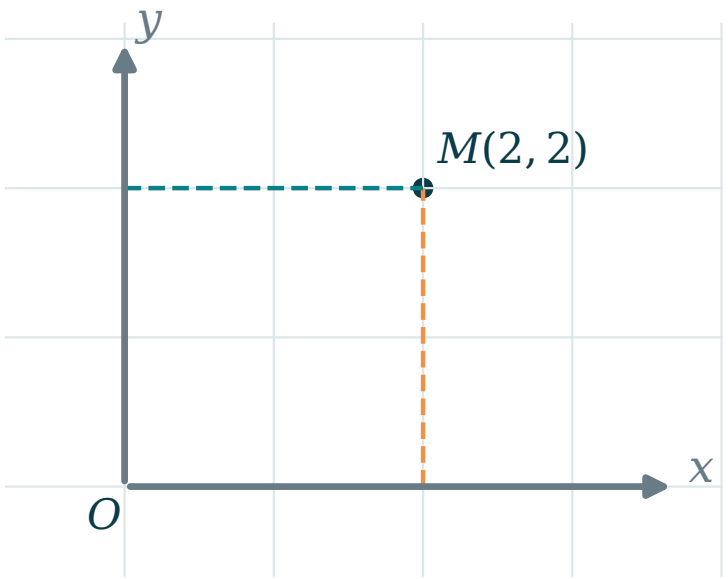
M нүктесі	Оның координаталары $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторын береді және O басына тәуелді.
a векторы	Оның координаталары базис векторлары бойынша жіктеу коэффициенттері болады.
Санақ басын көшіру	Нүктелердің координаталарын өзгертеді. Базис өзгермесе, еркін вектордың координаталары сақталады.
Базисті ауыстыру	Нүктелер мен векторлардың сандық координаталарын өзгертеді.

Аффиндік және декарттық торлар

Аффиндік жүйе



Декарттық жүйе



Бір координаталар жиынтығы таңдалған санақ басы мен базиске қатысты орынды береді. Координаталық тордың пішіні базиске тәуелді.

Аффиндік координаталарға мысал

Бастапқы декарттық жүйеде $O = (1, -1)$, $e_1 = (2, 0)$ және $e_2 = (1, 1)$ берілген. M нүктесінің аффиндік координаталары (2,3).

$$\overrightarrow{OM} = 2e_1 + 3e_2 = (7, 3)$$

$$M = (1, -1) + (7, 3) = (8, 2)$$

Екі жүйедегі M координаталары әртүрлі. Геометриялық нүктенің өзі өзгермейді.

Екі нүкте арқылы вектор координаталары

A және B бір аффиндік жүйеде берілсін. $\overrightarrow{OB}$ жіктеуінен $\overrightarrow{OA}$ жіктеуін азайтамыз.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$$

Мысалы, $A = (1, 2, -1)$, $B = (4, 6, 11)$ үшін $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12)$ аламыз.

Координаталар айырмасының формуласы қиғашбұрышты базисте де дұрыс.

Кез келген базистегі сызықтық амалдар

Векторларды қосу мен санға көбейту базис векторларының бұрыштары мен ұзындықтарына тәуелсіз, координаталар бойынша орындалады.

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a_1 + \beta b_1, \dots, \alpha a_n + \beta b_n)$$

Егер $a = (2, -1)$ және $b = (-1, 3)$ болса, $2a + b = (3, 1)$.

Қосу мен сызықтық комбинациялар үшін базистің ортонормаланған болуы қажет емес.

Басқа аффиндік жүйеге көшу

o векторы жаңа O' басының ескі жүйедегі координаталарын берсін. S бағандары жаңа базистің ескі жүйедегі координаталарын қамтиды.

$$x_{\text{ескі}} = o + S x_{\text{жаңа}}, \qquad a_{\text{ескі}} = S a_{\text{жаңа}}$$

$$x_{\text{жаңа}} = S^{-1}(x_{\text{ескі}} - o), \qquad \det S \neq 0$$

Еркін вектор формуласында o қосылғышы жоқ. Ол нүкте координаталарының арасында көшкенде пайда болады.

Тікбұрышты декарттық жүйе

Декарттық жүйе ортонормаланған базисі бар аффиндік жүйе болады: базис векторлары бірлік және өзара перпендикуляр.

$$e_i \cdot e_i = 1, \qquad e_i \cdot e_j = 0 \quad (i \neq j)$$

Мұндай жүйеде ұзындықтар, арақашықтықтар мен бұрыштар координаталар көбейтінділерінің кәдімгі қосындылары арқылы өрнектеледі.

Үшөлшемді кеңістікте бұдан әрі оң декарттық жүйені қолданамыз.

Декарттық жүйедегі вектор ұзындығы

Өзара перпендикуляр құраушылар үшін Пифагор теоремасы бойынша:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$ жазықтықта

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$ кеңістікте

$a = (3, 4, 12)$ үшін $|a| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$ аламыз.

Қиғашбұрышты базистегі ұзындық

Декарттық координаталарда $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ болсын. $v = e_1 + e_2$ векторының осы базистегі координаталары (1,1).

$$v = (2, 1)_{\text{дек}}, \qquad |v| = \sqrt{5} \neq \sqrt{1^2 + 1^2}$$

Жалпы базисте базис векторларының ұзындықтары мен араларындағы бұрыштарды ескеру қажет.

$$|v|^2 = \sum_{i,j} x_i x_j (e_i \cdot e_j)$$

Екі нүктенің арақашықтығы

$\rho(A, B)$ арақашықтығы $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығына тең. Мұндағы барлық координаталар декарттық.

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Алдымен координаталар айырмалары, содан кейін алынған вектордың ұзындығы табылады.

Жазықтық үшін формулада тек алғашқы екі қосылғыш қалады.

Арақашықтықты есептеуге мысал

$$A = (1, 2, -1), \qquad B = (4, 6, 11)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12)$$

$$\rho(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$$

Жеке айырманың таңбасы арақашықтыққа әсер етпейді, себебі айырмалар квадратқа шығарылады.

Кесінді нүктелері және параметр

M нүктесінің AB кесіндісінде жатуы оның радиус-векторын төмендегідей өрнектеуге болуына мәндес:

$$M = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB, \qquad 0 \le t \le 1$$

$t = 0$ кезінде A, $t = 1$ кезінде B алынады. $0 < t < 1$ болса, нүкте кесіндінің ішінде жатады.

Бұл жазу нүктелердің координаталар бағандарының теңдігін білдіреді.

Кесіндіні іштей бөлу

Егер $AM : MB = m : n$, мұндағы $m, n > 0$ болса, $t = m/(m+n)$.

$$M = \frac{nA + mB}{m + n}$$

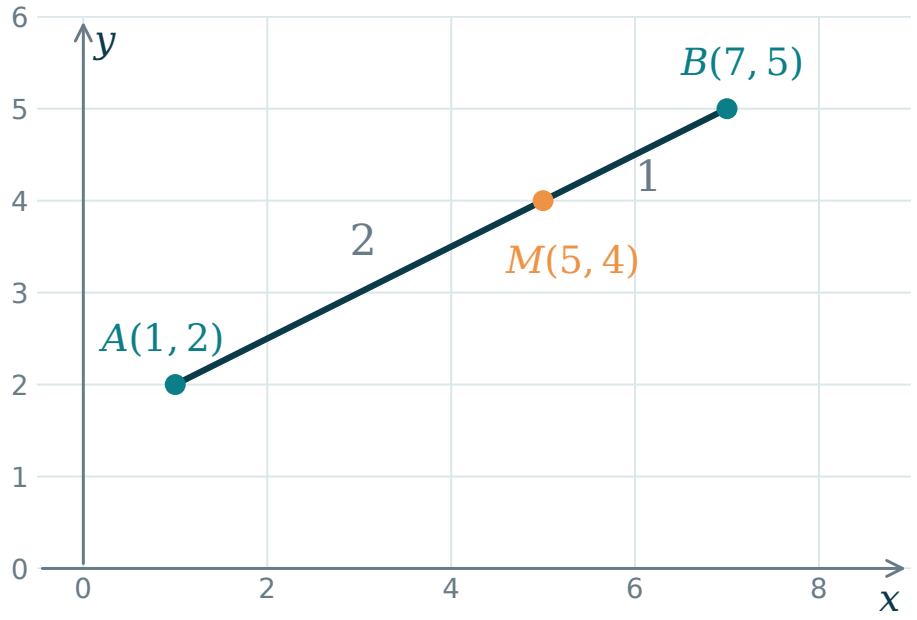
Мысалы, $x_M = (nx_A + mx_B)/(m+n)$. Қалған координаталар үшін формула дәл осындай.

В координаталарының салмағы m-ге тең. M нүктесі B-ге жақындаған сайын бұл салмақ артады.

Кесіндіні 2:1 қатынасында бөлу

$A = (1, 2)$, $B = (7, 5)$ және
$AM : MB = 2 : 1$ болсын.

$$M = \frac{A + 2B}{3} = (5, 4)$$



Нүкте A-дан B-ге дейінгі жолдың $2/3$ бөлігінде жатыр. Тексеру: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

Кесіндінің ортасы

$m = n$ болса, M нүктесі AB кесіндісінің ортасы болады.

$$M = \frac{A + B}{2}$$

$A = (1, 2, -1)$ және $B = (4, 6, 11)$ үшін $M = (5/2, 4, 5)$ аламыз.

Кесіндіні бөлу формулалары кез келген аффиндік координаталар жүйесінде дұрыс.

Кесіндіні сырттай бөлу

Сырттай бөлуде M нүктесі AB түзуінде, кесіндіден тыс жатады.
$AM : MB = m : n$, $m, n > 0$, $m \neq n$ болсын.

$$M = \frac{mB - nA}{m - n}$$

$A = (1, 2)$, $B = (7, 5)$ және $2 : 1$ қатынасы үшін $M = 2B - A = (13, 8)$ аламыз.

Мұнда $t = 2$. $m > n$ болса, нүкте B-ден әрі, $m < n$ болса, A-дан әрі жатады.

Үшбұрыштың ауырлық центрі

Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесінің координаталары төбелер координаталарының арифметикалық орталарына тең.

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

$A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (0, 3)$ болса, $G = (2, 1)$.

G нүктесі әр медианаңы төбеден бастап 2:1 қатынасында бөледі.

Скалярлық көбейтінді

Нөлдік емес a және b векторларының арасындағы бұрышты φ деп белгілейік, мұндағы $0 \leq \varphi \leq \pi$.

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\varphi$$

Скалярлық көбейтінді нақты сан болады. Ол оң, нөлге тең немесе теріс болуы мүмкін.

Кемінде бір вектор нөлдік болса, скалярлық көбейтінді нөлге тең.

Көбейтіндінің координаталық формуласы

Ортонормаланған базисте сызықтық комбинациялардың көбейтіндісін ашып, базис векторларының өзара перпендикулярлығын ескереміз.

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Мысалы, $(1, 2, -1) \cdot (3, 0, 4) = 3 + 0 - 4 = -1$.

Кез келген базисте формулаға $e_i \cdot e_j$ коэффициенттері кіреді.

Скалярлық көбейтіндінің қасиеттері

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(\alpha a + \beta b) \cdot c = \alpha(a \cdot c) + \beta(b \cdot c)$$

$$a \cdot a = |a|^2 \geq 0, \qquad a \cdot a = 0 \iff a = 0$$

Екінші аргумент бойынша сызықтылық симметрия мен бірінші аргумент бойынша сызықтылықтан шығады.

Перпендикулярлық критерийі

Нөлдік емес векторлар үшін тік бұрышқа нөлдік косинус сәйкес келеді. Нөлдік вектор келісім бойынша кез келген векторға ортогональ.

$$a \perp b \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot b = 0$$

Мысалы, $(2, 1) \cdot (-1, 2) = -2 + 2 = 0$.

Перпендикулярлық координаталар пропорциялары арқылы емес, скалярлық көбейтінді арқылы тексеріледі.

Екі вектордың арасындағы бұрыш

$a \neq 0$ және $b \neq 0$ үшін бұрыш косинус арқылы анықталады.

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

$a = (1, 1, 0)$ және $b = (1, 0, 1)$ болса, көбейтінді 1-ге, екі ұзындық та $\sqrt{2}$ шамасына тең.

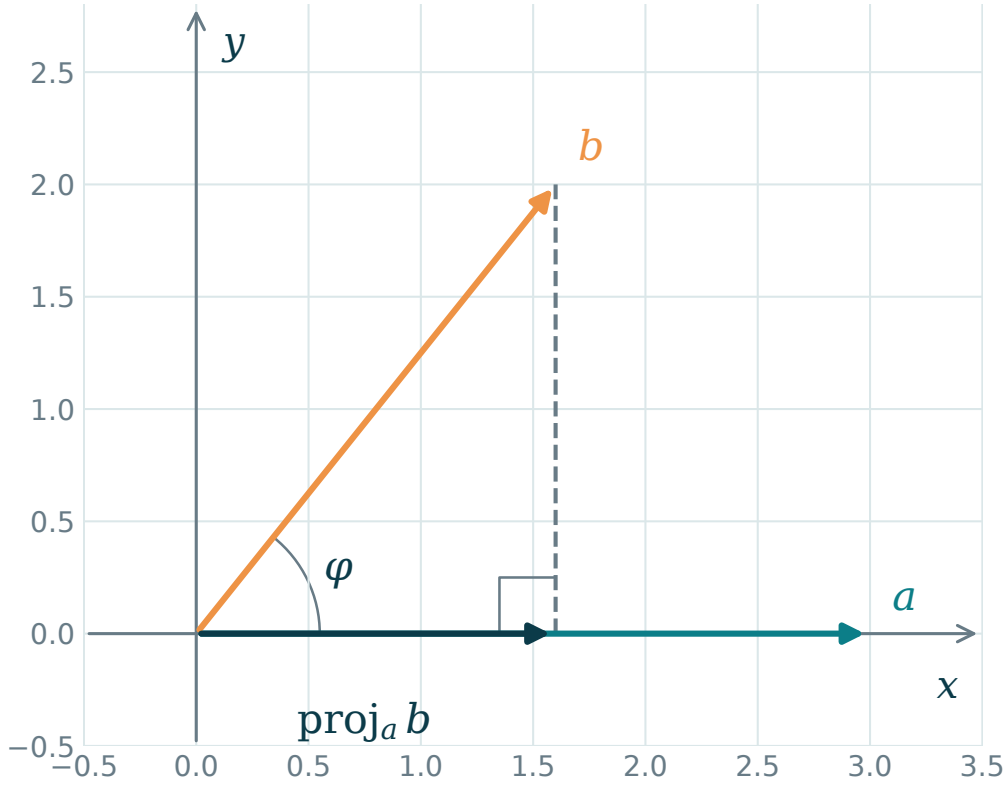
$\cos\varphi = 1/2$, яғни $\varphi = 60^\circ$ аламыз.

Скалярлық және векторлық проекциялар

$a \neq 0$ болсын. b векторының a бағытына скалярлық проекциясының таңбасы болады.

$$\mathrm{pr}_a\, b = \frac{a \cdot b}{|a|}$$

$$\mathrm{proj}_a\, b = \frac{a \cdot b}{|a|^2}\, a$$



Векторлық проекция a векторына коллинеар вектор болады.

Ортогональ проекцияға мысал

$$a = (2, 1), \qquad b = (1, 3), \qquad a \cdot b = 5, \quad |a|^2 = 5$$

$$\operatorname{proj}_a b = (2, 1)$$

$$b - \operatorname{proj}_a b = (-1, 2), \qquad (2, 1) \cdot (-1, 2) = 0$$

Бастапқы вектор мен оның проекциясының айырмасы проекция бағытына перпендикуляр.

Негізгі метриялық теңсіздіктер

$$|a \cdot b| \leq |a|\,|b|$$

Коши-Буняковский теңсіздігі көбейтіндіні косинус арқылы анықтаудан шығады. Ол бұрыш формуласындағы мәндердің рұқсат етілген аралығын қамтамасыз етеді.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Үшбұрыш теңсіздігінің геометриялық мағынасы: тікелей орын ауыстыру ұзындығы аралық нүкте арқылы өтетін жол ұзындығынан аспайды.

Жиі кездесетін қателер

Санақ басы және базис	Нүкте координаталары екеуіне де тәуелді. Еркін вектор координаталары базиске тәуелді.
Ұзындық формуласы	Координаталар квадраттарының қосындысы ортонормаланған базисте ұзындықтың квадратын береді.
m:n қатынасы	Іштей бөлуде nA+mB алынып, содан кейін m+n шамасына бөлінеді.
Проекция	Скалярлық проекция векторлық проекциядан ажыратылады. Бөлімдерде ұзындықтың әртүрлі дәрежелері тұрады.

Өзіндік жұмыс

1. $O = (1, -1)$, $e_1 = (2, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ және $M_{\text{афф}} = (1, 2)$ болса, M декарттық координаталарын табыңыз.

2. $A = (0, -1, 2)$ және $B = (2, 2, 8)$ нүктелерінің арақашықтығын есептеңіз.

3. $A = (0, 0)$, $B = (6, 3)$ және кесінді ішінде $AM : MB = 1 : 2$ болса, M нүктесін табыңыз.

4. t қандай болғанда $(1, -2)$ және $(t, 3)$ векторлары перпендикуляр?

5. $b = (3, 1)$ векторының $a = (1, 2)$ векторына векторлық проекциясын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $M = (5, 1)$, себебі $O + e_1 + 2e_2 = (5, 1)$.

2. $\rho(A, B) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$.

3. $M = (2A + B)/3 = (2, 1)$.

4. $t = 6$, себебі $t - 6 = 0$.

5. $\text{proj}_a\, b = (1, 2)$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Аффиндік координаталар жүйесін беру үшін не қажет?
2. Декарттық базисті қандай шарттар сипаттайды?
3. Координаталар айырмасының формуласы кез келген базисте неліктен дұрыс?
4. Кесіндіні іштей және сырттай бөлу формулалары қалай алынады?
5. Скалярлық көбейтінді бұрыш пен перпендикулярлықты қалай анықтайды?
6. Скалярлық және векторлық проекциялар несімен ерекшеленеді?

Әдебиеттер

Аналитикалық геометрия бойынша негізгі әдебиеттер

П. С. Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

П. С. Моденов. Аналитическая геометрия.

Сызықтық алгебра және есептер

А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра.

И. В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.