Математикалық талдау 1

11-дәріс

Айнымалыны алмастыру және бөліктеп интегралдау

Күрделі функция мен көбейтінді ережелерін кері қолдану
Әдісті таңдау және аралас есептер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: алмастыру мен бөліктеп интегралдауды негіздеу, тиімді әдісті таңдау және бірнеше әдісті біріктіру.

Айнымалыны алмастыру

Ішкі функцияны тану.
Дифференциалды түрлендіру.
Кері алмастыру және облыс.

Бөліктеп интегралдау

u және dv бөліктерін таңдау.
Қайталап және циклдік қолдану.
Қайталама формулалар.

Таңдалған әдіс қалған интегралды қарапайым етуі керек. Соңғы жауап туынды арқылы тексеріледі.

Алмастыру: тізбекті ережені кері қолдану

f J аралығында үзіліссіз, $F' = f$ болсын. $u = \varphi(x)$ үздіксіз дифференциалдансын және оның мәндері J-ге кірсін.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

Белгілеу: $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\,dx$. Сонда интеграл $\int f(u)\,du$ түріне келеді.

Алдымен ішкі функцияны, содан кейін оның туындысына сәйкес көбейткішті іздейміз.

Алмастыру формуласының дәлелі

$H(x) = F(\varphi(x))$ деп белгілейік. Күрделі функцияның туындысынан:

$$H^{'}(x) = F^{'}(\varphi(x))\varphi^{'}(x) = f(\varphi(x))\varphi^{'}(x)$$

Демек, H бастапқы интеграл астындағы функцияның алғашқы функциясы болады. Соңына еркін тұрақты қосылады.

Осы түрде φ функциясының бүкіл аралықта бірмәнді кері функциясы болуы міндетті емес.

Алмастыруды толық орындау реті

1. Жаңа айнымалы	$u=\varphi(x)$ деп алып, $du=\varphi'(x)\,dx$ табамыз.
2. Барлық көбейткіш	Интегралдағы өрнек пен дифференциалды түгел u арқылы жазамыз.
3. Жаңа интеграл	Қалған интегралды кестемен немесе басқа әдіспен есептейміз.
4. Кері ауыстыру	Жауаптағы u-дың орнына $\varphi(x)$ қойып, облысты және туындыны тексереміз.

Ішкі функцияның туындысын тану

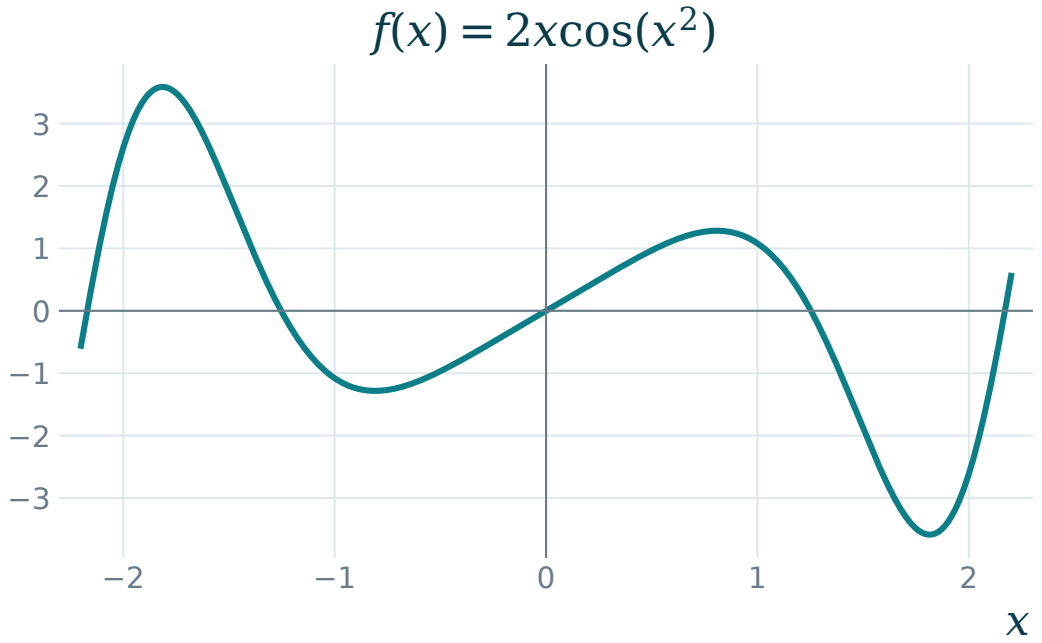
$$\int 2x\cos(x^2)\,dx, \qquad u = x^2, \qquad du = 2x\,dx$$

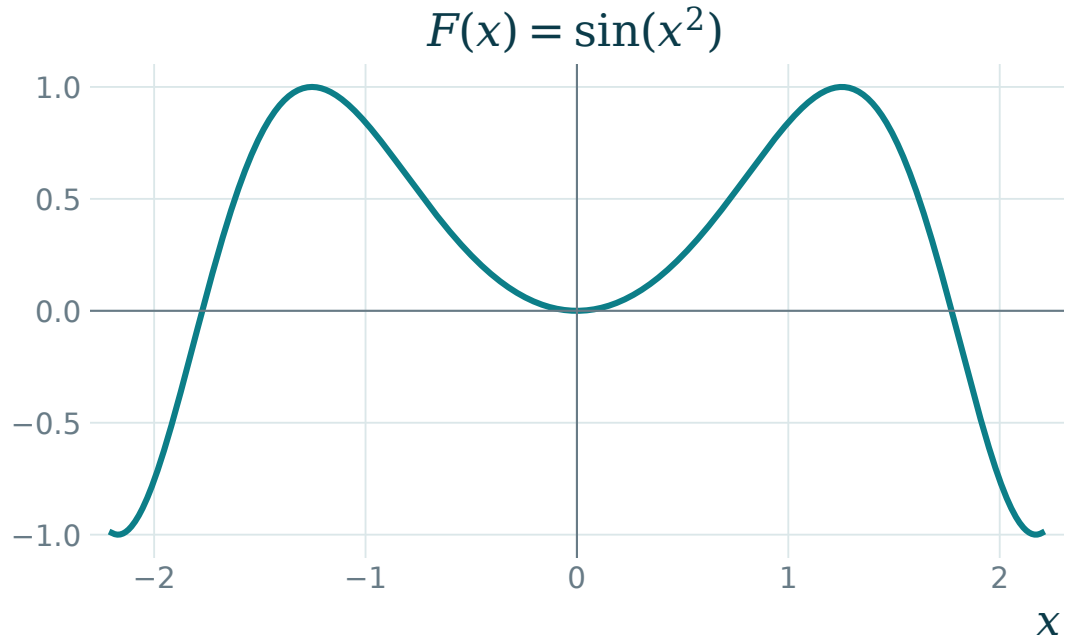
$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos u\,du$$

$$\sin u + C = \sin(x^2) + C$$

Ішкі x^2 функциясының туындысы $2x$ көбейткішімен дәл сәйкес келеді.

Алмастыру нәтижесін графикпен байланыстыру





Оң жақтағы $F(x) = \sin(x^2)$ функциясының туындысы сол жақтағы $2x\cos(x^2)$ функциясына тең.

Логарифмге келетін алмастыру

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$, сондықтан $x\,dx = du/2$.

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

x^2+1 әрқашан оң. Сондықтан бұл мысалда логарифмдегі модульді жазбауға болады.

Логарифмді жаңа айнымалы ретінде алу

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx, \qquad x > 0$$

$u = \ln x$, $du = dx/x$. Алымдағы логарифм u-ға, қалған көбейткіш du-ға айналады.

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Жауаптың облысы бастапқы өрнектегідей x>0 болып қалады.

Экспонентаны жаңа айнымалы ретінде алу

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$u = e^x$, $du = e^x\,dx$. Бөлімдегі $1 + e^x$ өрнегі 1+u болады:

$$\int \frac{du}{1+u} = \ln(1+u) + C = \ln(1+e^x) + C$$

$1 + e^x > 0$, сондықтан формула барлық нақты x үшін дұрыс.

Түбірді алмастыру арқылы жою

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}, \qquad x > 0$$

$u = \sqrt{x}$, x=u², $dx = 2u\,du$. Сондықтан:

$$\int \frac{2u\,du}{u(1+u)} = 2\ln(1+u) + C = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$$

u>0 болғандықтан, u-ға қысқарту және логарифмді жазу заңды.

Кері бағыттағы алмастыру

x=ψ(t) қатаң монотонды, үздіксіз дифференциалданатын және $\psi'(t) \neq 0$ болсын. Сонда:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt$$

Жаңа интеграл есептелгеннен кейін t айнымалысын x арқылы өрнектейміз. Қажетті кері тармақ алдын ала таңдалады.

Бұл жерде қатаң монотондық кері функцияның бірмәнді анықталуын қамтамасыз етеді.

Тригонометриялық алмастыруға мысал

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad |x| < 2$$

x=2 sin t, $-\pi/2 < t < \pi/2$ деп аламыз. $dx = 2\cos t\, dt$ және $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$.

$$\int dt = t + C = \arcsin\frac{x}{2} + C$$

Таңдалған аралықта cos t>0. Сол себепті квадрат түбірдегі модуль дұрыс ашылады.

Ескі айнымалыны түгел алмастыру

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx, \qquad x > -1$$

u=x+1, x=u−1, dx=du. x көбейткішін бастапқы күйінде қалдырмаймыз:

$$\int (u-1)u^{1/2}\,du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

Жауап: $\frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$.

Алмастырудың бірмәнділігі қажет емес жағдай

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}\,dx, \qquad u=\sin x$$

du=cos x dx. Бастапқы интегралда ішкі функцияның туындысы бар, сондықтан кері функцияны іздемейміз:

$$\int \frac{du}{2+u} = \ln(2+\sin x) + C$$

2+sin x≥1>0. Формула барлық нақты x үшін тексеріледі.

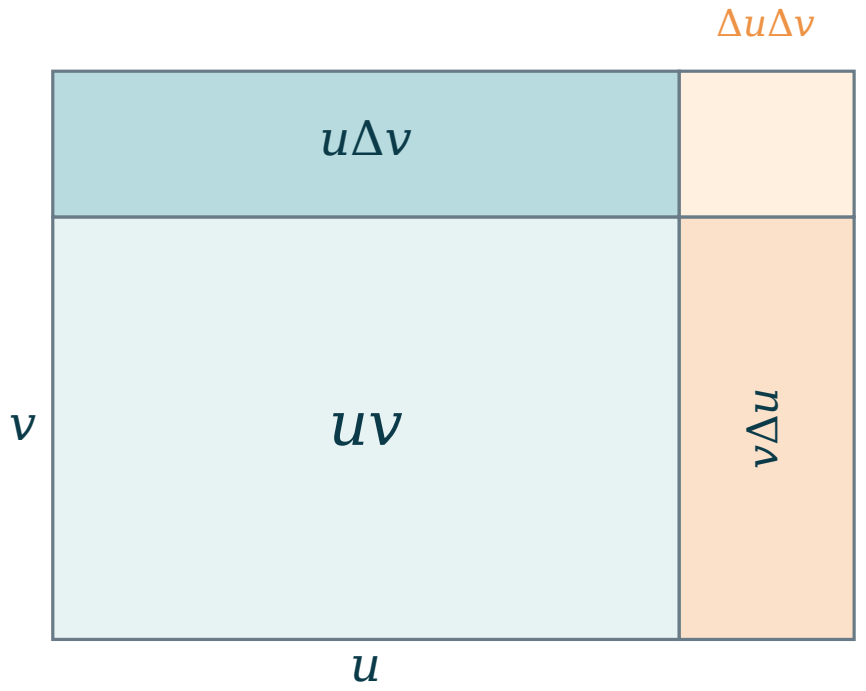
Алмастырудағы жиі қателер

Коэффициент	du=2x dx болса, x dx=du/2. Жетіспейтін 1/2 коэффициенті жауапты өзгертеді.
Айнымалылар араласуы	Жаңа интегралда x пен u бір-біріне байланыссыз айнымалылар сияқты қатар қалмауы керек.
Облыс	Түбір, логарифм және кері тригонометриялық функция үшін тармақ пен таңба тексеріледі.
Соңғы жауап	Егер бастапқы айнымалы x болса, жауап x арқылы беріледі және туындымен тексеріледі.

Көбейтінді өсімшесінің құрылымы

$$\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

Суретте u,v және олардың оң өсімшелері көрсетілген. Жаңа аудан екі жолақ пен кіші бұрыштан тұрады.



Туындыға өткенде көбейтінді ережесі шығады. Интегралдауда осы ережені кері қолданамыз.

Бөліктеп интегралдау формуласын шығару

u және v функциялары I аралығында үздіксіз дифференциалдансын. Көбейтіндінің дифференциалы:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Еркін тұрақтылар есептеудің соңында бір C түрінде біріктіріледі.

u және dv бөліктерін таңдау

u бөлігі	Туынды алғанда қарапайым болатын көбейткішті таңдаймыз: мысалы, көпмүше немесе логарифм.
dv бөлігі	Алғашқы функциясы оңай табылатын қалған көбейткіш пен dx алынады.
Төрт өрнек	u, du, dv, v өрнектерін анық жазамыз.
Таңдауды бағалау	Қалған $\int v\,du$ интегралы бастапқы интегралдан қарапайым болуы тиіс; кейде әдіс қайталанады.

Көпмүше мен экспонентаның көбейтіндісі

$$\int xe^x\,dx, \qquad u = x, \quad dv = e^x\,dx$$

du=dx, $v = e^x$. Көпмүшенің дәрежесі туынды алғанда төмендейді:

$$xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$$

Тексеру: $\left(e^x(x-1)\right)' = e^x(x-1) + e^x = xe^x$.

Бөліктеп интегралдау: x·sin x

$$\int x \sin x \, dx, \qquad u = x, \quad dv = \sin x \, dx$$

du=dx, v=−cos x. Формуладағы минус таңбасын мұқият сақтаймыз:

$$-x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

v-нің өзінде минус болғандықтан, қалған интегралдың алдында плюс шығады.

Жеке тұрған логарифмді интегралдау

$$\int \ln x\, dx, \qquad x > 0, \quad u = \ln x, \quad dv = dx$$

du=dx/x, v=x. Көрінбейтін екінші көбейткіш 1 екенін пайдаланамыз:

$$x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C$$

Көбейтінді түрінде жазылмаған функцияға да бөліктеп интегралдау қолданылуы мүмкін.

Арктангенсті интегралдау

$$\int \arctan x\,dx, \qquad u = \arctan x, \quad dv = dx$$

$du = dx/(1+x^2)$, v=x. Қалған интеграл алмастырумен есептеледі:

$$x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Бұл мысалда бөліктеп интегралдау және қарапайым алмастыру бірге қолданылды.

Әдісті қайталап қолдану

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

Бірінші қадамнан кейінгі интеграл алдыңғы мысалда есептелді. Оны орнына қоямыз:

$$x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Көпмүше дәрежесі әр қадам сайын төмендейтіндіктен, қайталау шекті қадамда аяқталады.

Циклдік интегралдау: бірінші қадам

Бір алғашқы функцияны іздеп, тұрақтыны соңында қосамыз. I және J белгілерін енгізейік:

$$I = \int e^x \cos x \, dx, \qquad J = \int e^x \sin x \, dx$$

$$I = e^x \cos x + J, \qquad J = e^x \sin x - I$$

Екі теңдікте де u ретінде тригонометриялық көбейткіш таңдалды.

Циклдік интегралдау: теңдеуді шешу

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$

I екі жақта да бар. Оларды бір жаққа жинап, $2I = e^x(\cos x + \sin x)$ теңдігін аламыз:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

Қайталанған интеграл бұл жолы I-ге қатысты сызықтық теңдеу берді.

Логарифм мен кері дәреженің көбейтіндісі

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx, \qquad x > 0$$

$u = \ln x$, $dv = x^{-2}\,dx$, $du = dx/x$, $v = -1/x$.

$$-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

Екі әдісті бірге қолдану

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx, \qquad u = x^2, \quad x^3 dx = \frac{1}{2} u\,du$$

Алмастырудан кейін көпмүше мен экспонентаның көбейтіндісі қалады:

$$\frac{1}{2}\int u e^u\,du = \frac{1}{2} e^u (u-1) + C$$

$$\frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + C$$

Логарифм дәрежелеріне қайталама формула

$I_n = \int (\ln x)^n \, dx$, x>0, n≥1 болсын. $u = (\ln x)^n$, dv=dx деп аламыз:

$$du = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx, \qquad v = x$$

$$I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$$

Формула тұрақтыға дейін орындалады; бастапқы қадам $I_0 = x$. Соңғы жауапқа +C қосылады.

Қайталама формуланы қолдану: $(\ln x)^2$

$$I_2 = x(\ln x)^2 - 2I_1, \qquad I_1 = x\ln x - x$$

I_1 өрнегін бірінші теңдікке қойып, ұқсас мүшелерді жинаймыз:

$$\int (\ln x)^2\,dx = x\big((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\big) + C$$

Қайталама формула бір есепті дәрежесі төменірек есепке әкеледі.

Екі әдістің қайсысын таңдаймыз?

Ішкі функция және туындысы	$f(\varphi(x))\varphi'(x)$ түріне келсе, алдымен алмастыруды қарастырамыз.
Көпмүше және exp не sin	Туынды алғанда көпмүше дәрежесі төмендесе, бөліктеп интегралдау тиімді.
Логарифм не арктангенс	$dv=dx$ деп алып, функцияның өзін u ретінде таңдау жиі көмектеседі.
Құрама құрылым	Алмастырудан кейін бөліктеп интегралдау не керісінше қажет болуы мүмкін.

Жиі кездесетін қателер

Формуладағы минус	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ формуласындағы минус таңбасын сақтаймыз.
dv және v	dv өрнегін v деп шатастырмаймыз: v-ні табу үшін интегралдау керек.
Қажетсіз күрделендіру	Таңдаудан кейінгі интеграл қиындаса, u және dv бөліктерін қайта қарастырамыз.
Тұрақты мен облыс	Соңғы жауапқа +C жазылады; логарифм мен түбірдің бастапқы облысы сақталады.

Өзіндік жұмыс

1. $\int 3x^2 \cos(x^3)\,dx$ интегралын табыңыз.

2. $\int x\,dx/(x^2+4)$ интегралын табыңыз.

3. $\int x \cos x\,dx$ интегралын табыңыз.

4. $\int (\ln x)/x^3\,dx$, x>0 интегралын табыңыз.

5. $\int x^3 \cos(x^2)\,dx$ интегралын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $\sin(x^3) + C$.

2. $(1/2)\ln(x^2 + 4) + C$.

3. $x \sin x + \cos x + C$.

4. $-(2\ln x + 1)/(4x^2) + C$, x>0.

5. $(1/2)(x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2)) + C$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Алмастыру әдісі туынды алудың қай ережесіне сүйенеді?
2. Алмастыруда dx пен қалған көбейткіштерді қалай түрлендіреміз?
3. Қай жағдайда алмастырудың кері тармағын таңдау қажет?
4. Бөліктеп интегралдау формуласы қалай шығарылады?
5. u және dv бөліктерін таңдаудың тиімділігін қалай бағалаймыз?
6. Циклдік интегралдау нәтижесінде шыққан теңдеуді қалай қолданамыз?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.