Математикалық талдау 1

12-дәріс

Рационал функцияларды интегралдау

Көпмүшелерді бөлу және жай бөлшектерге жіктеу
Нақты түбірлер, квадраттық көбейткіштер, қайталама формулалар

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: рационал функцияны жай бөлшектерге жіктеу, коэффициенттерін табу және әр бөлікті интегралдау.

Алгебралық дайындық

Дұрыс және бұрыс бөлшектер.
Бөлімді көбейткіштерге жіктеу.
Белгісіз коэффициенттер әдісі.

Интегралдау

Логарифмге келетін мүшелер.
Квадрат толықтыру және арктангенс.
Еселі көбейткіштерге формулалар.

Жалпы жол: бөлу, жіктеу, коэффициенттерді табу, интегралдау, туындымен тексеру.

Рационал функция

P және Q нақты коэффициентті көпмүшелер, Q нөлдік көпмүше емес болсын. Олардың қатынасы рационал функция деп аталады.

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad Q(x) \neq 0$$

Интеграл бастапқы бөлім нөлге тең болмайтын аралықтарда қарастырылады.

Алгебралық түрлендірулерден кейін де бастапқы анықталу облысы сақталады.

Дұрыс және бұрыс рационал бөлшек

Дұрыс бөлшек — $\deg P < \deg Q$. Мұндай бөлшекті бірден жай бөлшектерге жіктеуге болады.

Бұрыс бөлшек — $\deg P \geq \deg Q$. Алдымен көпмүшелерді бөліп, бүтін бөлікті бөліп аламыз.

Мысалдар — $1/(x^2+1)$ дұрыс бөлшек; $(x^3+1)/(x^2+1)$ бұрыс бөлшек.

Көпмүшелерді бөлу

Қалдықпен бөлу теоремасы бойынша P=SQ+R, мұнда R=0 немесе deg R<deg Q.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

S көпмүшесі дәрежелік формуламен интегралданады. Қалған дұрыс бөлшекке жай бөлшектер әдісі қолданылады.

Бүтін бөлікті бөліп алу коэффициенттер санын және есептеуді азайтады.

Бөлуден кейін бірден интегралданатын мысал

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{1-x}{x^2+1}$$

Қалған бөлшек екі кестелік түрге жіктеледі: 1/(1+x²) және x/(1+x²).

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Тексеру: x(x²+1)+(1−x)=x³+1.

Бөлімді нақты көбейткіштерге жіктеу

Нақты коэффициентті көпмүше тұрақты көбейткішке, сызықтық және нақты сандарда жіктелмейтін квадраттық көбейткіштерге жіктеледі:

$$Q(x) = a \prod_i (x - a_i)^{m_i} \prod_j (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j}$$

a≠0; m_i, n_j оң бүтін сандар. Квадраттық көбейткіштер үшін $p_j^2 - 4q_j < 0$.

Әр көбейткіштің түрі мен еселігі жіктеудің құрылымын анықтайды.

Жай сызықтық көбейткіш

Егер бөлімде x−a көбейткіші бірінші дәрежеде тұрса, оған бір тұрақты алымды бөлшек сәйкес келеді:

$$\frac{A}{x-a}$$

Мысалы, бөлім (x−1)(x+2) болса, жіктеу A/(x−1)+B/(x+2) түрінде ізделеді.

A және B коэффициенттері кейін теңбе-теңдіктен табылады.

Еселі сызықтық көбейткіш

Бөлімде $(x-a)^m$ көбейткіші болса, бірінші дәрежеден m-ге дейінгі барлық дәрежелер жазылады:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

Тек ең жоғары дәрежелі бөлшекті қалдыру жалпы дұрыс жіктеуді бермейді.

Кейбір коэффициенттер тек есептеу нәтижесінде ғана нөлге тең болуы мүмкін.

Жіктелмейтін квадраттық көбейткіш

$Q_2(x) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$ болсын. Бірінші дәрежедегі квадраттық көбейткішке:

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

алымы сызықтық болатын бөлшек сәйкес келеді. Алымды тек тұрақты сан деп алуға болмайды.

Алым дәрежесі бөлімдегі жіктелмейтін көбейткіш дәрежесінен кіші болады.

Еселі квадраттық көбейткіш

Бөлімде $Q_2(x)^m$ болса, әр дәреже үшін жеке сызықтық алым жазылады:

$$\frac{M_1x+N_1}{Q_2(x)}+\frac{M_2x+N_2}{Q_2(x)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{Q_2(x)^m}$$

Әр алымдағы екі коэффициент те белгісіз. Бұл сызықтық көбейткіштерден негізгі айырмашылық.

Барлық дәрежелер бірінші дәрежеден басталып жазылады.

Жіктеудің құрылымын жазуға мысал

$$Q(x) = x(x-1)^2(x^2+1)^2, \qquad \deg P < 7$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$$

Жеті белгісіз коэффициент бар. Құрылым дұрыс жазылғаннан кейін ғана коэффициенттерді табамыз.

Белгісіз коэффициенттерді табу

Бөлімнен арылу	Жіктеуді ортақ бөлімге көбейтіп, көпмүшелер теңбе-теңдігін аламыз.
Ыңғайлы мәндер	Алынған көпмүшелік теңдікке бөлімнің түбірлерін қоюға болады: енді бөлшек жоқ.
Коэффициенттерді теңестіру	Екі жақтағы x-тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырамыз.
Тексеру	Табылған коэффициенттермен бөлшектерді қайта қосып, бастапқы бөлшекті қалпына келтіреміз.

Екі жай сызықтық көбейткіш: жіктеу

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Бөлімдерден арылсақ, 1=A(x+2)+B(x−1). x=1 және x=−2 мәндерін қоямыз:

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{1}{3}$$

Бұл көпмүшелер теңбе-теңдігі болғандықтан, осы екі мәнді қою заңды.

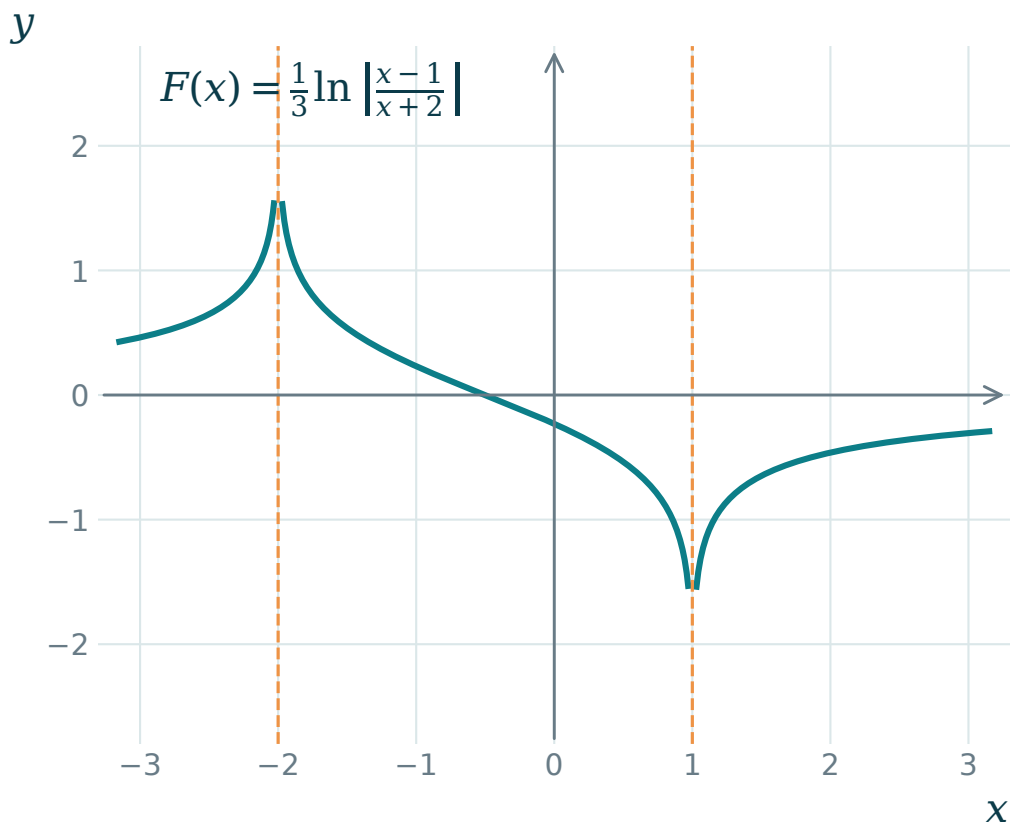
Екі жай сызықтық көбейткіш: интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

Әр бөліктің интегралы логарифм болады. Жауап:

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

x=−2 және x=1 арқылы өтпейтін әр аралықта тұрақты жеке таңдалады.



Жай түбірдегі коэффициенттің формуласы

$Q(x) = (x - a)Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq 0$ болсын. A/(x−a) мүшесінің коэффициенті:

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

Негіздеме: жіктеуді x−a-ға көбейтіп, $x \to a$ шегіне өтеміз. Қалған бөліктер шекте нөл береді.

Бұл формула жай нақты түбірге арналған. Еселі түбірде бірнеше коэффициент керек.

Еселі сызықтық көбейткіш: жіктеу

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

2x+1=A(x−1)+B. Коэффициенттерден A=2, ал тұрақты мүшеден −A+B=1, сондықтан B=3.

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

Еселі сызықтық көбейткіш: интеграл

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int (x-1)^{-2}\,dx$$

Бірінші бөлік логарифмге, екіншісі дәрежелік функцияға келеді:

$$2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C, \qquad x \neq 1$$

Тексеру: 2/(x−1)+3/(x−1)² бастапқы бөлшекті береді.

Сызықтық көбейткіштерді интегралдау

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \qquad k \geq 2$$

k=1 жағдайы логарифм береді, k≥2 жағдайлары теріс дәрежелер арқылы интегралданады. Барлық жағдайда x≠a.

Жай және еселі көбейткіш бірге кездескенде

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ортақ бөлімге келтірсек, алым $(x+1)^2 - x(x+1) - x = 1$ болады.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

Формула $x=-1$ және $x=0$ нүктелерін қамтымайтын аралықта қолданылады.

Квадраттық бөлімнің туындысын бөлу

$Q(x) = x^2 + px + q$, $p^2 - 4q < 0$ болсын. Алымдағы $Mx+N$ өрнегін Q'-ке келтіреміз:

$$Mx + N = \frac{M}{2}(2x + p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$$

$$\int \frac{Mx + N}{Q(x)}\,dx = \frac{M}{2}\ln Q(x) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{Q(x)}$$

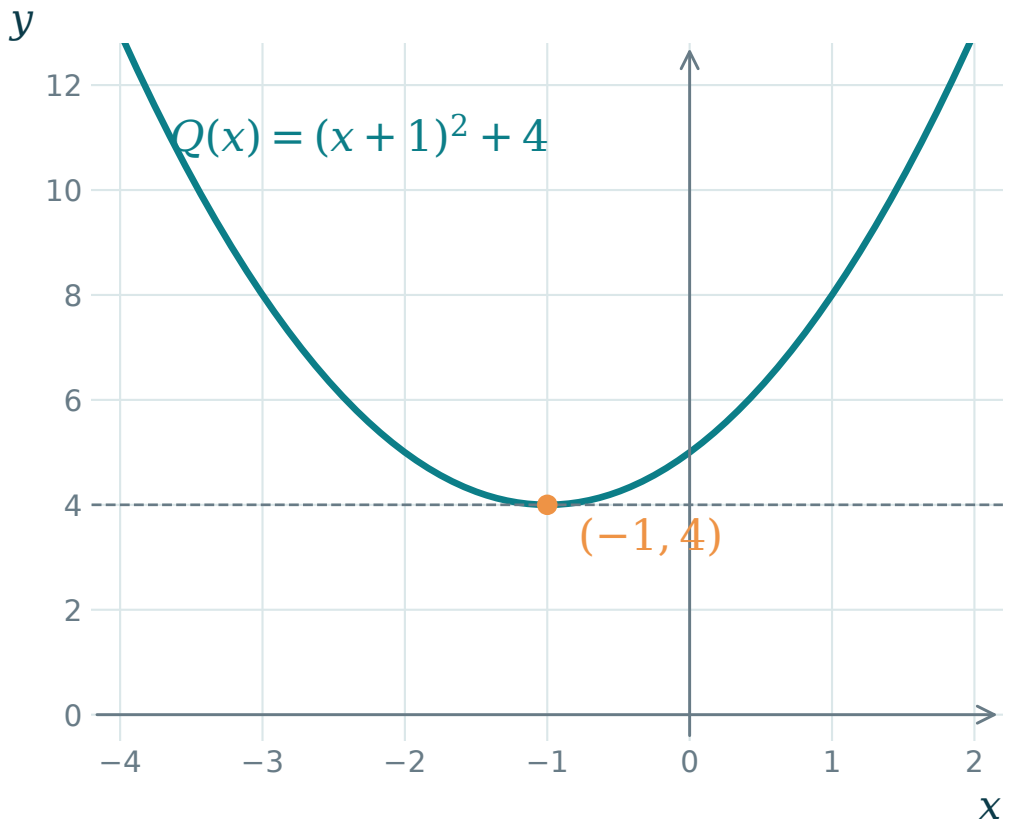
$Q(x) > 0$ болғандықтан, $\ln Q(x)$ модульсіз жазылады.

Толық квадратты бөліп алу

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2$$

$$a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} > 0$$

Мысал: x²+2x+5=(x+1)²+4. Ең кіші мәні 4; нақты түбірі жоқ.



Квадраттық бөлшек үшін жалпы формула

$Q = x^2 + px + q$, $a = \sqrt{4q - p^2}/2 > 0$ болсын. Алдыңғы екі қадамды біріктіреміз:

$$\int \frac{Mx + N}{Q(x)}\,dx = \frac{M}{2}\ln Q(x) + \frac{N - Mp/2}{a}\arctan\frac{x + p/2}{a} + C$$

Алымдағы Q' бөлігі логарифмге, тұрақты қалдық арктангенске келеді.

Формуланы жаттаудан гөрі алымды Q' және тұрақтының қосындысына жіктеу сенімдірек.

Квадраттық бөлшекке нақты мысал

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+5}\,dx, \qquad 3x+5=\frac{3}{2}(2x+2)+2$$

$Q=(x+1)^2+4$. Қалдық бөлікте $a=2$ болғандықтан, $2\cdot(1/2)$ коэффициенті қысқарады:

$$\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)+\arctan\frac{x+1}{2}+C$$

Сызықтық және квадраттық көбейткіш

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

Жіктеуде квадраттық бөлімге сызықтық алым керек. Бұл мысалда оның тұрақты мүшесі нөлге тең.

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Нәтиже x≠0 болатын әр аралықта дұрыс.

Квадраттық бөлімнің екінші дәрежесі

a>0 болсын. $J_2 = \int dx/(x^2+a^2)^2$ интегралын мына туындымен байланыстырамыз:

$$\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right)' = \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2} - \frac{1}{x^2+a^2}$$

Соңғы теңдіктен ізделетін бөлшекті бөліп алып, екі жағын интегралдаймыз. Қалған бөлік арктангенс кестесіне келеді.

J_2 формуласы және қарапайым мысал

$$J_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C$$

a=1 болғанда:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Бұл жауапта рационал мүше мен арктангенс бірге пайда болады.

Еселі квадраттық бөлімдегі x алымы

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx, \qquad u = x^2+1, \quad du = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{2u} + C$$

$$-\frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Алым бөлімнің туындысына келсе, жай алмастыру жеткілікті.

Жоғары дәрежелер үшін қайталама формула

$J_k = \int dx/(x^2+a^2)^k$, a>0, k≥2 болсын. Дәрежені төмендететін формула:

$$J_k = \frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} J_{k-1}$$

Бастапқы қадам: $J_1 = (1/a)\arctan(x/a)$. Формула тұрақтыға дейін орындалады; соңында +C қосылады.

Негіздеме үшін $x/(x^2+a^2)^{k-1}$ өрнегінен туынды алып, J_k-ға сәйкес бөлшекті бөліп аламыз.

Еселі квадраттық көбейткіш: жалпы жағдай

u=x+p/2 деп алсақ, $Q(x) = u^2 + a^2$, ал сызықтық алым Au+B түріне келеді.

$$\int \frac{Au + B}{(u^2 + a^2)^k}\,du = A\int \frac{u\,du}{(u^2 + a^2)^k} + BJ_k$$

Бірінші бөлік w=u²+a² алмастыруымен, екінші бөлік J_k қайталама формуласымен есептеледі.

Осылайша нақты сызықтық және квадраттық көбейткіштердің барлық дәрежелері қамтылады.

Толық мысал: бөлу және жіктеу

$$\frac{x^3+2x^2+3}{x^2-1} = x+2+\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$$

Қалған бөлшекті A/(x−1)+B/(x+1) түрінде жазамыз. x+5=A(x+1)+B(x−1) теңдігінен A=3, B=−2.

$$\frac{x^3+2x^2+3}{x^2-1} = x+2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

Толық мысал: интеграл және тексеру

$$\int \frac{x^3+2x^2+3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

Туындысы x+2+3/(x−1)−2/(x+1) болады. Ортақ бөлімге келтіргенде бастапқы рационал функция шығады.

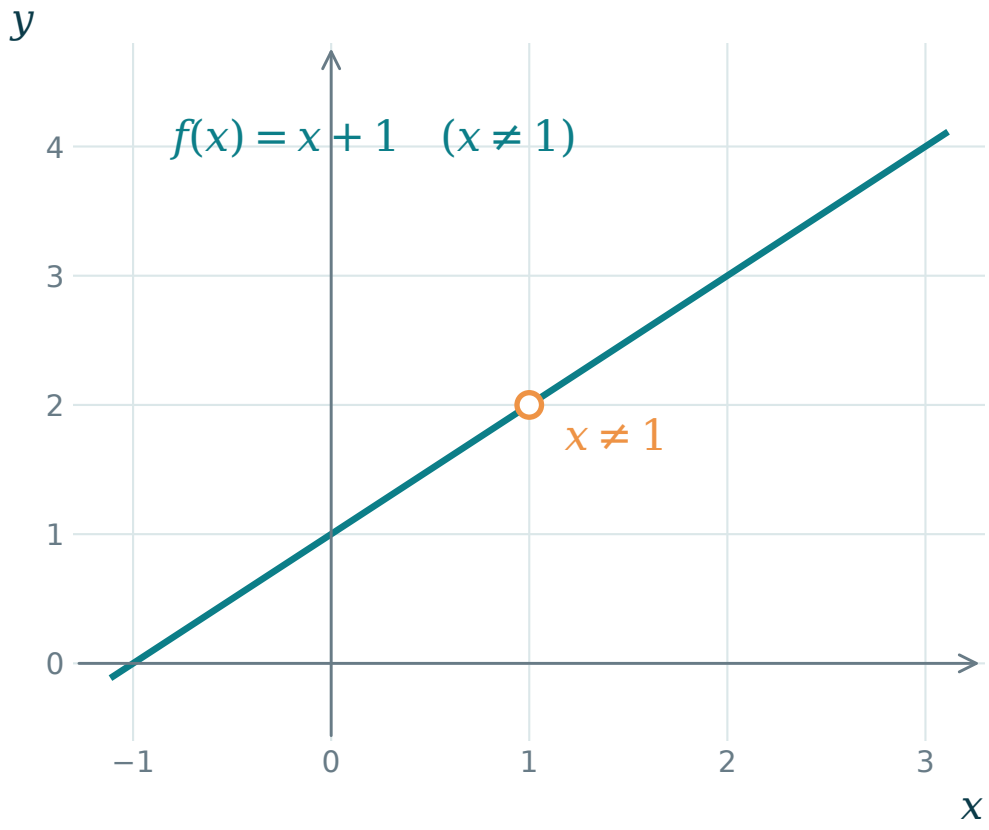
x=−1 және x=1 нүктелері облысқа кірмейді; тұрақты әр аралықта жеке қарастырылады.

Қысқартудан кейін бастапқы облысты сақтау

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1, \qquad x \neq 1$$

Қысқарту x=1 нүктесіндегі үзілісті автоматты түрде толтырмайды. Бастапқы облыс екі аралықтан тұрады.

Әр аралықта алғашқы функция $x^2/2 + x + C$. Екі аралықтағы C тәуелсіз болуы мүмкін.



Рационал функцияны интегралдау жоспары

1. Дайындау — Бастапқы облысты жазып, қажет болса көпмүшелерді бөлеміз.
2. Жіктеу — Бөлімді нақты сызықтық және квадраттық көбейткіштерге жіктеп, барлық еселіктерді ескереміз.
3. Коэффициенттер — Көпмүшелер теңбе-теңдігінен белгісіз коэффициенттерді табамыз.
4. Интегралдау — Логарифм, арктангенс, дәрежелік және қайталама формулаларды қолданып, туындымен тексереміз.

Жиі кездесетін қателер

Бүтін бөлікті өткізу	Бұрыс бөлшекті бірден тек жай бөлшектердің қосындысы ретінде жазуға болмайды.
Еселіктер	$(x-a)^m$ немесе Q_2^m үшін төменгі дәрежелердің мүшелері де қажет.
Квадраттық алым	Жіктелмейтін квадраттық бөлімге жалпы түрде Mx+N алымы жазылады.
Тексеру	Коэффициенттер табылғаннан кейін жіктеуді қосып, интегралдан кейін туынды алып тексереміз.

Қандай мүшеден қандай жауап шығады?

A/(x−a)	Логарифм: A ln|x−a|.
$A/(x-a)^k$, k≥2	Теріс дәрежелі рационал функция.
$(Mx+N)/Q_2$	Логарифм мен арктангенстің қосындысы.
$(Mx+N)/Q_2^k$, k≥2	Рационал мүшелер және J_k арқылы арктангенске дейін төмендету.

Өзіндік жұмыс

1. $\int dx/(x^2-1)$ интегралын табыңыз.

2. $\int (x+2)/(x-1)^2\,dx$ интегралын табыңыз.

3. $\int (2x+3)/(x^2+2x+5)\,dx$ интегралын табыңыз.

4. $\int dx/(x(x^2+4))$ интегралын табыңыз.

5. $\int dx/(x^2+4)^2$ интегралын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $(1/2)\ln|(x-1)/(x+1)|+C$.

2. $\ln|x-1|-3/(x-1)+C$.

3. $\ln(x^2+2x+5)+(1/2)\arctan((x+1)/2)+C$.

4. $(1/4)\ln|x|-(1/8)\ln(x^2+4)+C$.

5. $\dfrac{x}{8(x^2+4)}+\dfrac{1}{16}\arctan(x/2)+C$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Рационал бөлшек бұрыс болса, бірінші қандай қадам орындалады?
2. Жіктелмейтін квадраттық көбейткішті қалай танимыз?
3. Еселі сызықтық көбейткішке қандай бөлшектер сәйкес келеді?
4. Квадраттық көбейткіштің алымын неге сызықтық түрде жазамыз?
5. Квадраттық бөлшекте логарифм мен арктангенс қалай пайда болады?
6. Жіктеу мен табылған интегралдың дұрыстығын қалай тексереміз?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.