Математикалық талдау 1

3-дәріс

Функция және оның шегі

Біржақты шектер және шектердің қасиеттері
Шексіз аз функциялар және тамаша шектер

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Жиындар, тізбектер және шектер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: функция шегін қатаң анықтау, біржақты шектерді ажырату және негізгі әдістермен шектерді есептеу.

Анықтамалар мен қасиеттер

Функция және оның анықталу облысы.
Коши және Гейне анықтамалары.
Біржақты және шексіз шектер.

Есептеу әдістері

Алгебралық түрлендірулер.
Қысу теоремасы.
Тамаша шектер мен эквиваленттіліктер.

Шек x-тің a нүктесіне жақындағандағы функция мәндерінің өзгерісін сипаттайды.

Функция ұғымы

Функция D жиынының әрбір x элементіне бір ғана нақты y санын сәйкестендіреді.

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad y = f(x)$$

D(f) анықталу облысы, ал $E(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$ мәндер жиыны деп аталады.

Аргументтің әрбір мүмкін мәніне функцияның жалғыз мәні сәйкес келеді.

Анықталу облысын табу

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$

Түбір астындағы өрнек теріс болмауы керек: $x + 1 \geq 0$. Бөлім нөлден өзге болуы керек: $x \neq 2$.

$$D(f) = [-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

Шекке қатысты барлық жақындаулар функцияның анықталу облысының ішінде қарастырылады.

Функцияның берілу тәсілдері

Формула арқылы	$f(x) = x^2 + 1$. Есептеу ережесі көрсетіледі.
Бөліктеп беру	Әртүрлі аралықтарда әртүрлі формулалар қолданылуы мүмкін.
Кесте немесе график	Аргумент пен функция мәндерінің сәйкестігі бейнеленеді.
Анықталу облысы	Формуламен бірге оның қолданылатын облысын да көрсету қажет.

Функцияларға амалдар қолдану

Қосынды мен көбейтінді екі функция да анықталған аргументтерде беріледі.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad g(x) \neq 0$$

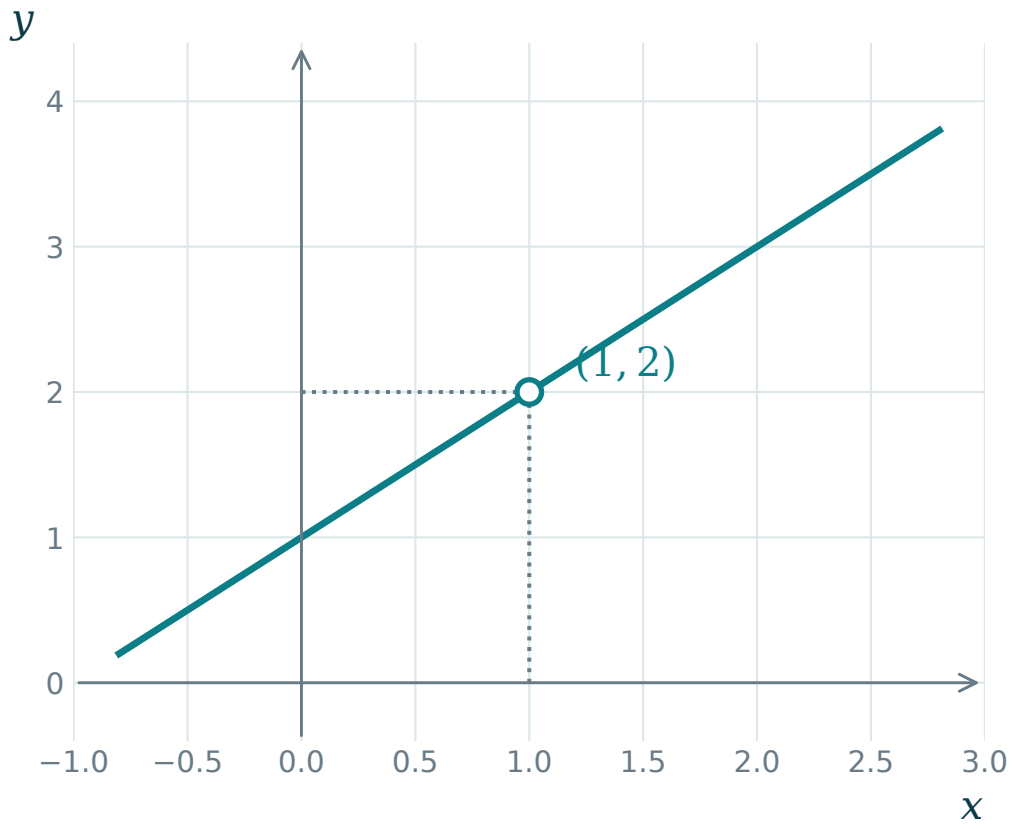
Күрделі функция $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ түрінде беріледі. Мұнда x саны $D(g)$-ге, ал g(x) саны $D(f)$-ке тиісті болуы керек.

Нүктедегі мән және нүктедегі шек

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \quad x \neq 1$$

x саны 1-ге жақындағанда f(x) мәндері 2-ге жақындайды. Бірақ берілген формула x=1 кезінде анықталмаған.

Сондықтан $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Шек f(1) мәніне тәуелді емес.



Шектік нүкте және тесілген маңай

а нүктесінің әрбір маңайында D жиынының а-дан өзге нүктесі бар болса, а сол жиынның шектік нүктесі деп аталады.

$$\forall \delta > 0 \; \exists x \in D : \; 0 < |x - a| < \delta$$

$0 < |x - a| < \delta$ шарты а нүктесінің өзін алып тастайды. Осы жиын тесілген δ-маңай деп аталады.

Функция шегін қарастырғанда а анықталу облысының шектік нүктесі деп ұйғарамыз.

Функция шегінің Коши бойынша анықтамасы

Кез келген оң дәлдік үшін аргументті a-ға жеткілікті жақын алғанда функция мәндері L-ге осы дәлдікпен жақын болсын.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Импликация $x \in D(f)$ үшін орындалады. Сонда $\lim_{x \to a} f(x) = L$ деп жазамыз.

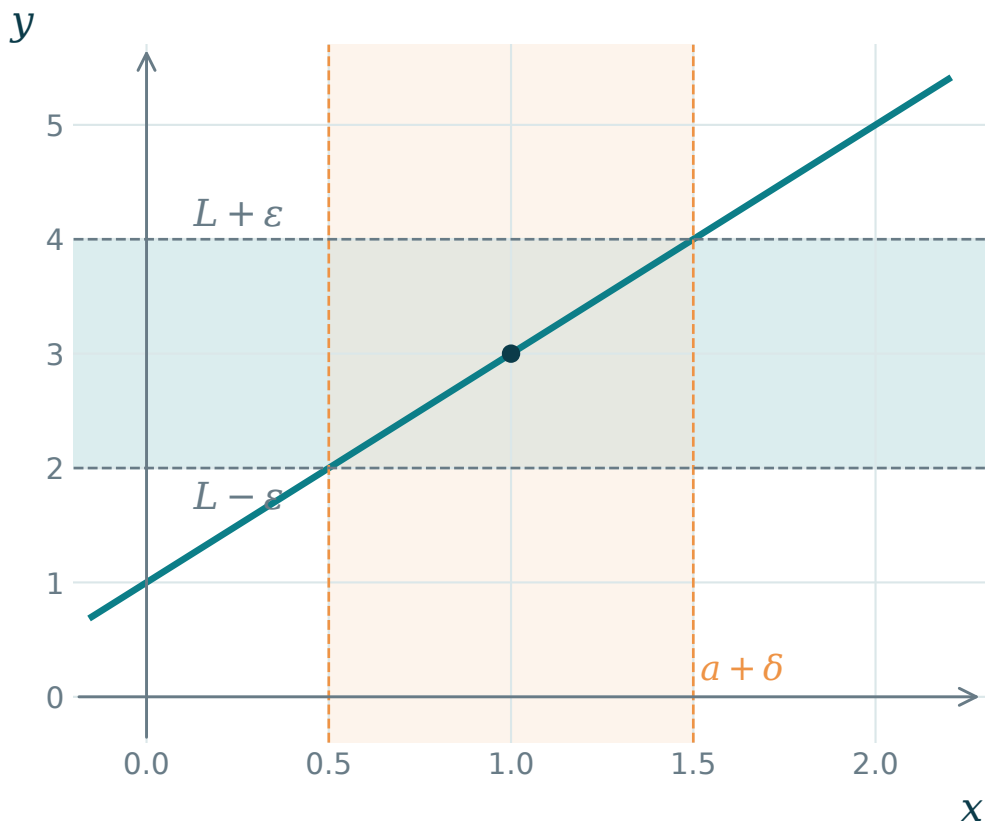
δ саны ε-ге тәуелді болуы мүмкін.

Эпсилон мен дельтаның мағынасы

$$f(x) = 2x + 1, \qquad a = 1, \quad L = 3$$

$|f(x) - 3| = 2|x - 1|$. Сондықтан кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \varepsilon/2$ деп аламыз.

Суретте $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.5$. Тік жолақтағы график көлденең жолақтың ішінде жатады.



Квадраттық функцияның шегін дәлелдеу

$\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ екенін дәлелдейік. Алдымен $|x-1|<1$ деп шектейміз. Онда 0<x<2 және $|x+1|<3$.

$$|x^2-1| = |x-1|\,|x+1| < 3|x-1|$$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$$

$0<|x-1|<\delta$ болса, $|x^2-1|<3\delta\le\varepsilon$.

Шектің Гейне бойынша сипаттамасы

a-ға ұмтылатын, a-ға тең емес аргументтердің кез келген тізбегін қарастырамыз.

$$x_n \in D(f), \quad x_n \neq a, \quad x_n \to a \implies f(x_n) \to L$$

Осы қасиеттің барлық осындай тізбектер үшін орындалуы Коши анықтамасына мәндес.

Бір ғана қолайлы тізбекті тексеру функция шегінің бар екенін дәлелдеуге жеткіліксіз.

Коши мен Гейне сипаттамаларының байланысы

Коши анықтамасы орындалса, $x_n \to a$ шарты әрбір δ-маңайға жеткілікті үлкен нөмірден бастап кіруді қамтамасыз етеді.

Керісінше, Коши шарты орындалмаса, бір $\varepsilon_0 > 0$ үшін әрбір n-де мынадай x_n таңдауға болады:

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$$

Онда $x_n \to a$, бірақ $f(x_n)$ L-ге ұмтылмайды. Бұл Гейне шартына қайшы.

Біржақты шектер

Сол жақ шек

$x \to a - 0$ кезінде x<a нүктелері ғана алынады. Белгіленуі: $\lim_{x \to a-0} f(x)$.

Оң жақ шек

$x \to a + 0$ кезінде x>a нүктелері ғана алынады. Белгіленуі: $\lim_{x \to a+0} f(x)$.

Анықтама

Сол жақта $a - \delta < x < a$, оң жақта $a < x < a + \delta$ шарттары қолданылады.

Екіжақты шектің бар болу критерийі

Функция a нүктесінің екі жағында да анықталсын. Ақырлы екіжақты шектің бар болуы екі біржақты шектің тең болуына мәндес.

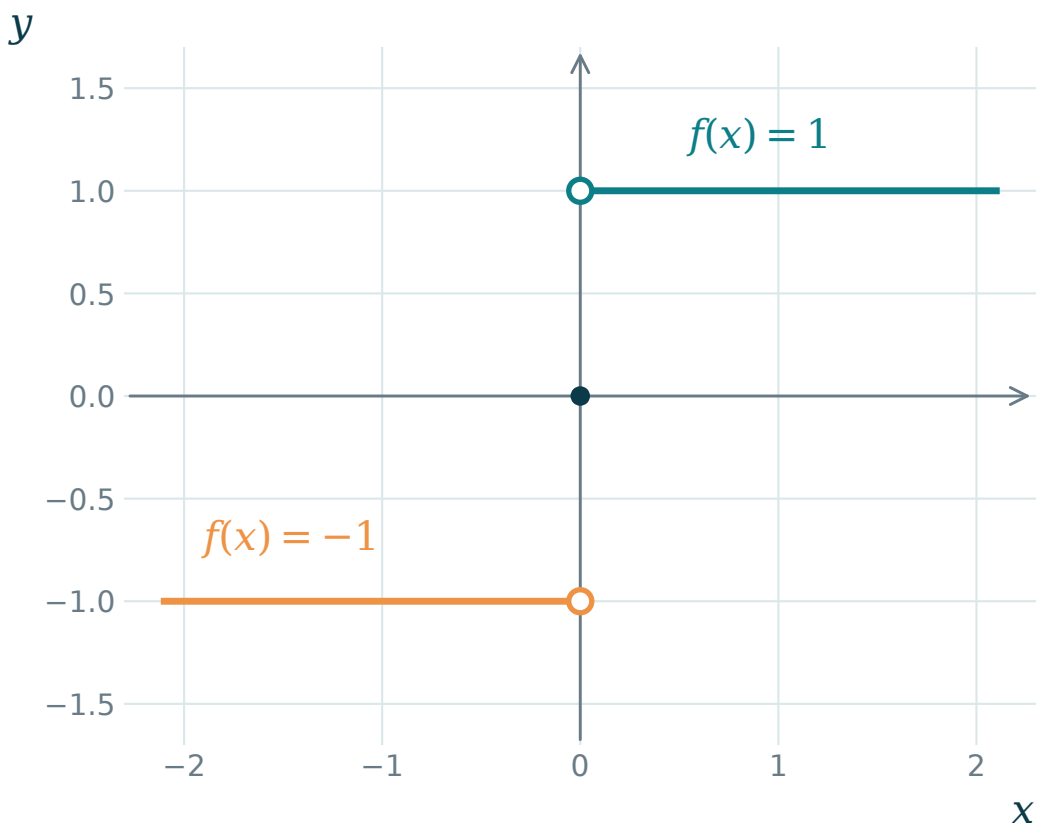
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = L$$

Сонда $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Сол және оң жақ шектер әртүрлі болса, екіжақты шек жоқ.

Екі жаққа арналған дельталардың ең кішісін таңдау жеткілікті.

Біржақты шектері әртүрлі функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



Сол жақ шек -1, оң жақ шек 1-ге тең. Сондықтан $x \to 0$ кезінде екіжақты шек жоқ.

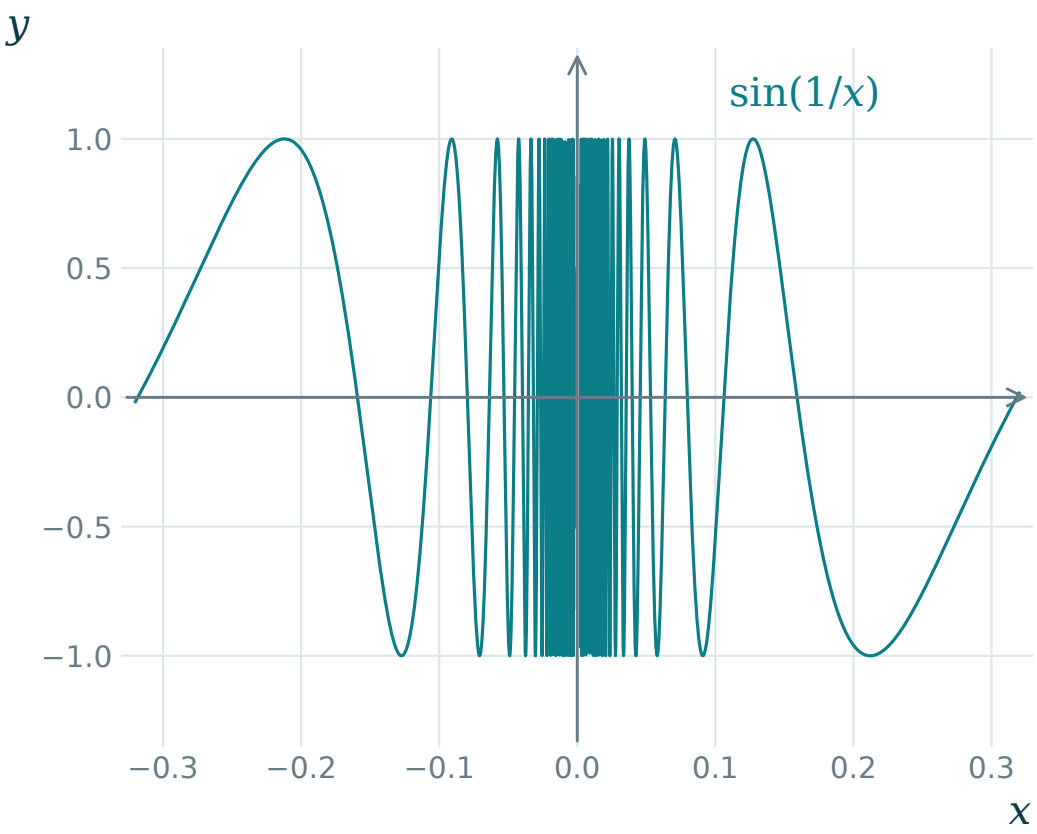
f(0) мәнін өзгерту бұл қорытындыны өзгертпейді.

Тербеліс салдарынан шектің болмауы

$$f(x) = \sin(1/x), \qquad x \neq 0$$

$x_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$,
$y_n = 1/(3\pi/2 + 2\pi n)$ тізбектері 0-ге оң жақтан ұмтылады.

Бірақ $f(x_n) = 1$, $f(y_n) = -1$. Гейне критерийі бойынша тіпті оң жақ шек те жоқ.



Ақырлы шегі бар функцияның қасиеттері

Жалғыздық

Берілген нүктеде ақырлы шек бар болса, ол жалғыз болады.

Жергілікті шенелу

Функция a нүктесінің жеткілікті кіші тесілген маңайында шенелген болады.

Дәлелдің негізі

$\varepsilon = 1$ үшін $|f(x)| \leq |L| + |f(x) - L| < |L| + 1$ бағасы орындалады.

Таңбаның сақталуы

$\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ болсын. $\varepsilon = L/2$ деп аламыз.

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$$

Демек, a-ның жеткілікті кіші тесілген маңайында функция оң болады. L<0 үшін теріс таңба сақталады.

Шектің таңбасы мен функцияның a нүктесіндегі мәнінің таңбасы бөлек қарастырылады.

Функция шектеріне қолданылатын амалдар

$f(x) \to A$, $g(x) \to B$ болсын. Барлық шектер $x \to a$ кезінде алынады.

$$f(x) + g(x) \to A + B, \qquad cf(x) \to cA$$

$$f(x)g(x) \to AB$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B} \qquad (B \neq 0)$$

Бөлімнің шегі нөлдік емес болса, ол жеткілікті жақын аргументтерде де нөлден өзге болады.

Тікелей қою арқылы шекті есептеу

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

Алым мен бөлімнің шектерін жеке табамыз. Бөлімнің шегі 3-ке тең:

$$\frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{10}{3}$$

Арифметикалық амалдар туралы теорема тікелей қоюды негіздейді.

Көбейткіштерге жіктеу әдісі

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Тікелей қойғанда 0/0 анықталмағандығы шығады. x=2 нүктесінен тыс жерде:

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 \longrightarrow 4$$

Тесілген маңайда тең өрнектердің шектері бірдей болады.

Түйіндес өрнек арқылы түрлендіру

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1},\qquad x\neq 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

Аргумент шексіздікке ұмтылғандағы шек

x жеткілікті үлкен болғанда f(x) мәндері L-ге берілген дәлдікпен жақындаса, шек x-тің оң шексіздікке ұмтылуы кезінде алынады.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists R > 0 : \; x > R \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Теріс шексіздік үшін x<-R шарты қолданылады. Аргументтер анықталу облысынан алынады.

Оң шексіздік жағдайында анықталу облысы оң бағытта шенелмеген деп ұйғарамыз.

Шексіздіктегі рационал функцияның шегі

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x + 2}{2x^2 + 1}$$

Алым мен бөлімді x^2 шамасына бөлеміз:

$$\frac{3 - 1/x + 2/x^2}{2 + 1/x^2} \longrightarrow \frac{3}{2}$$

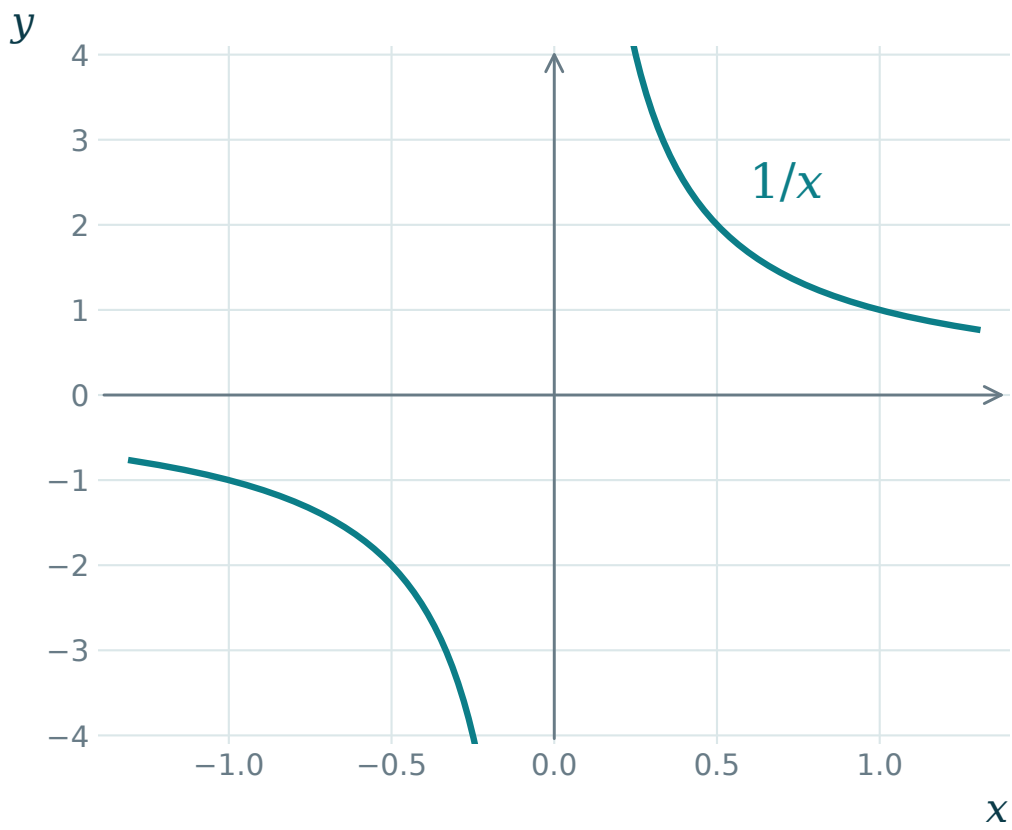
Дәрежелері бірдей болса, шек бас коэффициенттердің қатынасына тең. Осы мысалда теріс шексіздіктегі шек те 3/2 болады.

Нүктедегі шексіз шектер

$f(x) \to +\infty$ болса, кез келген M>0 үшін a-ның жеткілікті кіші тесілген маңайында f(x)>M орындалады.

Мысалы, $f(x) = 1/x$ үшін $x \to 0 + 0$ кезінде шек $+\infty$, ал $x \to 0 - 0$ кезінде $-\infty$.

Екіжақты таңбалы шексіз шек бұл мысалда жоқ.



Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар

Қарастырылатын жақындау кезінде шегі нөлге тең функция шексіз аз деп аталады.

$$\alpha(x) \to 0$$

Модулі кез келген оң шекарадан асып кететін функция шексіз үлкен болады:

$$|f(x)| \to +\infty$$

Бұл ұғымдар нақты бір жақындауға қатысты айтылады: нүктеге немесе шексіздікке.

Шексіз аз функциялардың негізгі қасиеттері

Бір жақындау кезінде шексіз аз функциялардың қосындысы, тұрақтыға көбейтіндісі және өзара көбейтіндісі шексіз аз болады.

$$\alpha \to 0, \quad |b| \le M \quad \Longrightarrow \quad b\alpha \to 0$$

$$|f| \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{f} \to 0$$

Кері бағытта $\alpha \to 0$ және $\alpha \neq 0$ болса, $|1/\alpha| \to +\infty$. Нөлдік емес болу жеткілікті жақын аргументтерде талап етіледі.

Функциялар үшін қысу теоремасы

Тесілген маңайда функция төменнен және жоғарыдан бір шекке ұмтылатын функциялармен бағалансын.

$$g(x) \le f(x) \le h(x), \qquad g(x), h(x) \to L$$

Онда $f(x) \to L$. Шеттердің бірдей шекке ұмтылуы шешуші рөл атқарады.

Тұжырым нүктедегі шектер үшін де, шексіздіктегі шектер үшін де қолданылады.

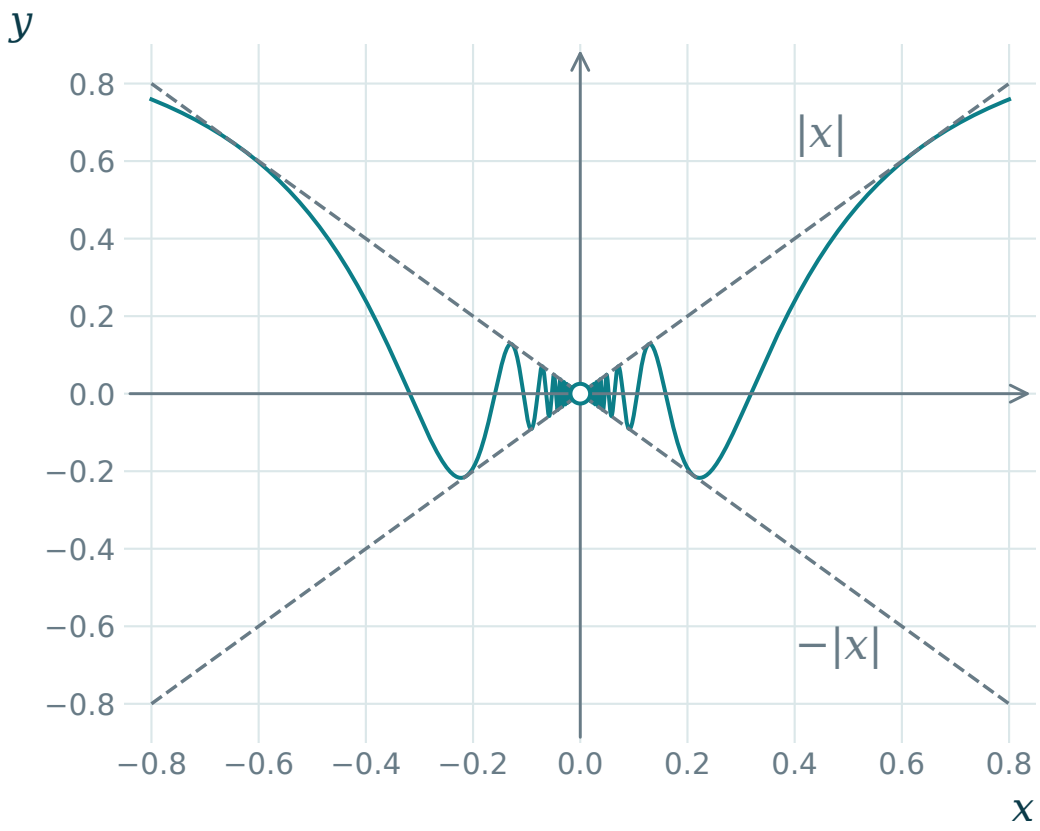
Тербелетін функцияны қысу

$$f(x) = x\sin(1/x), \qquad x \neq 0$$

$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$x \to 0$ кезінде екі шеткі функция да 0-ге ұмтылады. Сондықтан $x\sin(1/x) \to 0$.

Тербеліс амплитудасы нөлге ұмтылады.

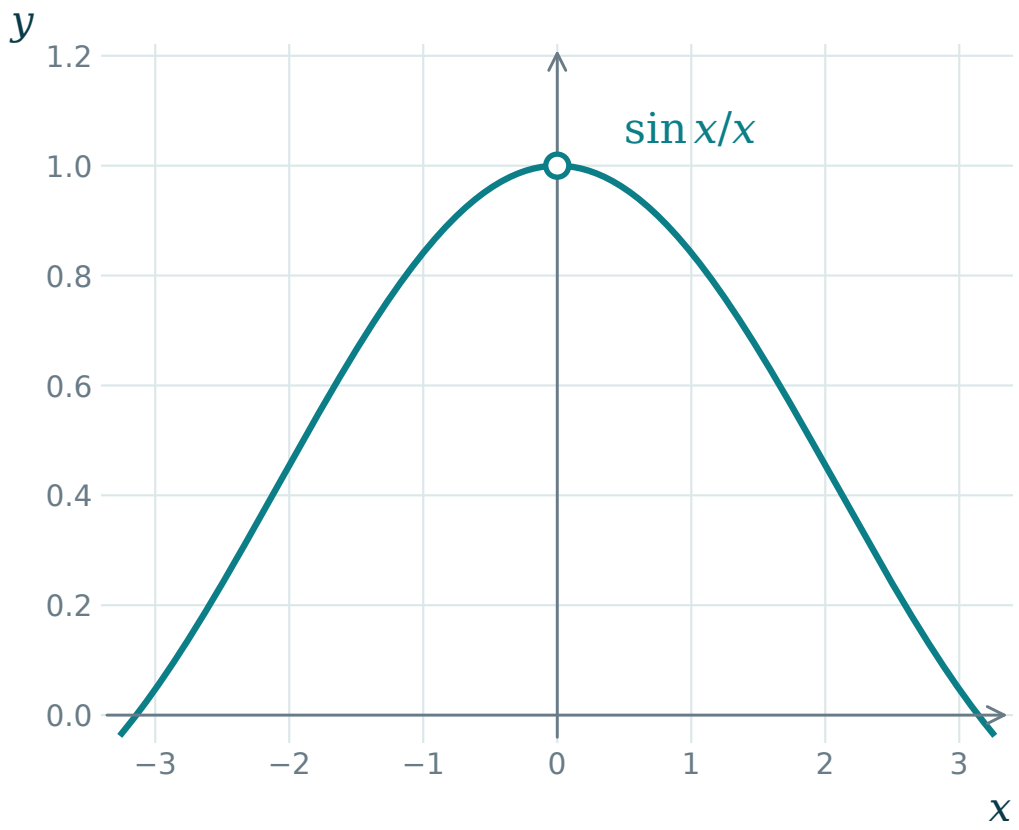


Бірінші тамаша шек

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Бұрыш радианмен өлшенеді. Қатынас x=0 нүктесінен тыс жерде анықталған.

Функцияның шегін білу үшін оған x=0 нүктесінде мән беру қажет емес.



Бірінші тамаша шекті негіздеу

$0 < x < \pi/2$ үшін геометриялық $\sin x < x < \tan x$ бағасынан:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

$0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) \le x^2/2$ болғандықтан, $\cos x \to 1$. Қысу теоремасын қолданамыз.

Қатынас жұп функция болғандықтан, теріс жақтан алынған шек те 1-ге тең.

Бірінші тамаша шекті қолдану

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{5x}\,\frac{2x}{\sin 2x} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

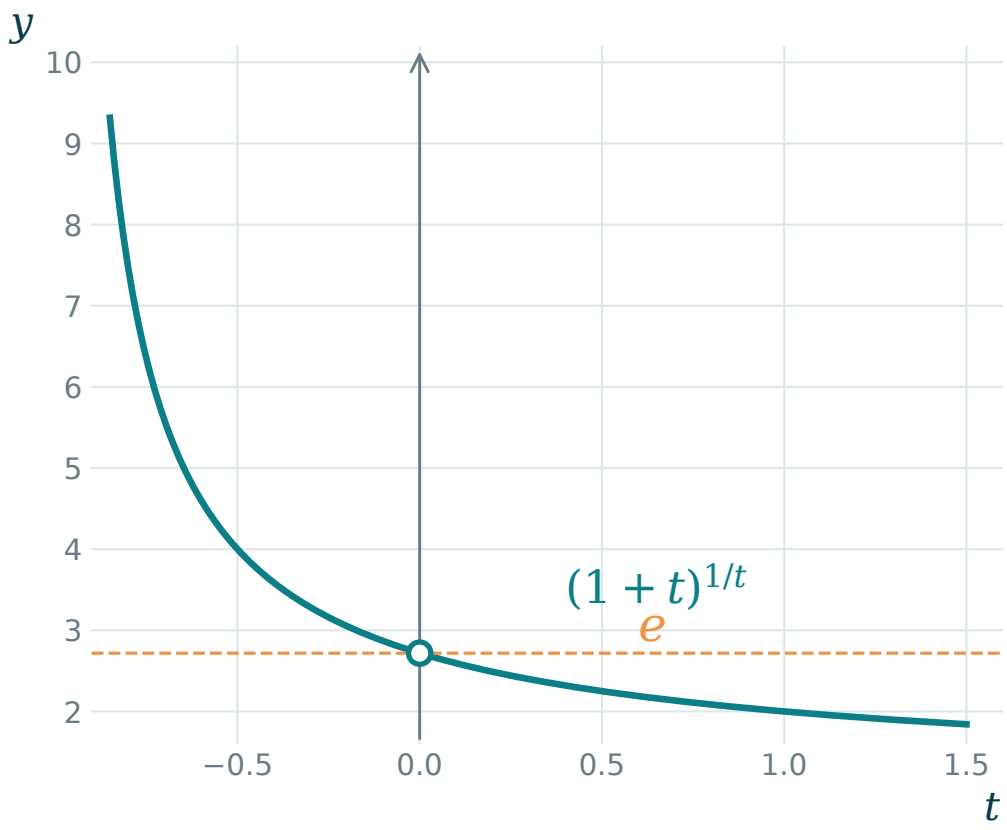
Аргументтегі тұрақты көбейткіштерді бөліп шығарып, негізгі қатынасты танимыз.

Екінші тамаша шек

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e$$

Нақты дәрежені қарастыру үшін 1+t>0 болуы қажет. Нөлдің маңында бұл шарт орындалады.

Бұл шек e санын анықтайтын тізбек шегінің функцияларға жалпылануын береді.



Екінші тамаша шектің оң жақтағы дәлелі

$t > 0$ үшін $n \leq 1/t < n+1$ болатындай n таңдаймыз. Онда $1/(n+1) < t \leq 1/n$.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \leq (1+t)^{1/t} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$a_n = (1+1/n)^n$ десек, шеткі өрнектер $a_{n+1}/(1+1/(n+1))$ және $a_n(1+1/n)$ болады. Екеуі де e-ге ұмтылады.

Қысу теоремасы бойынша оң жақ шек e-ге тең.

Екінші тамаша шектің сол жақтағы дәлелі

$-1 < t < 0$ үшін $v = -t/(1+t) > 0$ деп аламыз. t нөлге сол жақтан ұмтылса, v нөлге оң жақтан ұмтылады.

$$1 + t = \frac{1}{1+v}, \qquad t = -\frac{v}{1+v}$$

$$(1+t)^{1/t} = (1+v)^{(1+v)/v} = (1+v)(1+v)^{1/v} \longrightarrow e$$

Екі біржақты шек бірдей. Демек, екіжақты шек e санына тең.

Екінші тамаша шекті қолдану

$$(1+3x)^{1/x} = \left[(1+3x)^{1/(3x)}\right]^{3} \longrightarrow e^{3}$$

$$(1-2x)^{1/x} = \left[(1-2x)^{1/(-2x)}\right]^{-2} \longrightarrow e^{-2}$$

Әр мысалда жақша ішіндегі негіз оң болатын жеткілікті кіші маңай қарастырылады.

Шексіз аз функциялардың эквиваленттілігі

Бір жақындау кезінде екі шексіз аз функцияның қатынасы 1-ге ұмтылса, олар эквивалентті деп аталады.

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to 1$$

$x \to 0$ кезінде $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2/2$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$.

Қатынастың бөлімі жеткілікті жақын, нөлден өзге аргументтерде нөлдік емес болады.

Эквиваленттілікті қолдану шарттары

Эквивалентті көбейткіштерді көбейтінді мен бөліндіде алмастыруға болады. Айырмада жетекші мүшелер қысқаруы мүмкін.

$$x + x^2 \sim x \qquad (x \to 0)$$

$$\frac{(x + x^2) - x}{x^2} = 1$$

Алымдағы екі өрнекті де x-пен алмастыру қате нөлдік жауап береді.

Шекті есептеу тәсілін таңдау

Көпмүшелік бөлінді	0/0 болса, көбейткіштерге жіктеу және қысқарту.
Түбірлі өрнек	Түйіндес өрнекке көбейту.
Шексіздіктегі бөлінді	Ең жоғары дәрежеге бөлу.
Тригонометрия, дәреже	Тамаша шектерді, эквиваленттілікті немесе қысу теоремасын қолдану.

Жиі кездесетін қателер

Нүктедегі мән	f(a) мен $\lim_{x\to a} f(x)$ әртүрлі ұғымдар.
Біржақты шектер	Екіжақты шек үшін екі жақтағы шектерді салыстырамыз.
Анықталмағандық	0/0 дайын сандық мән бермейді.
Бұрыш өлшемі	Бірінші тамаша шекте бұрыш радианмен өлшенеді.

Өзіндік жұмыс

1. $\lim_{x\to 3}(x^2-9)/(x-3)$ табыңыз.

2. $\lim_{x\to 0}(\sqrt{4+x}-2)/x$ табыңыз.

3. $\lim_{x\to 0}\sin 3x/\sin 5x$ табыңыз.

4. $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$ табыңыз.

5. $f(x)=|x|/x$ үшін $x\to 0$ кезіндегі екіжақты шек бар ма?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. Шегі 6. x=3 нүктесінен тыс жерде бөлінді x+3-ке тең.

2. Шегі $1/4$. Түйіндес өрнекке көбейткенде $1/(\sqrt{4+x}+2)$ алынады.

3. Шегі $3/5$. Бірінші тамаша шекті қолданамыз.

4. Шегі e^2. Екінші тамаша шекті қолданамыз.

5. Жоқ. Сол жақ шек -1, оң жақ шек 1-ге тең.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Коши анықтамасында эпсилон мен дельта қалай байланысады?
2. Гейне сипаттамасында неліктен барлық тізбектер қарастырылады?
3. Екіжақты шек пен біржақты шектер қалай байланысады?
4. Шектің болуы функцияның жергілікті шенелуін қалай береді?
5. Екі тамаша шек қандай түрде жазылады?
6. Эквиваленттілікті айырмаларда қолдану неліктен сақтықты қажет етеді?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.