Математикалық талдау 1

14-дәріс

Анықталған интеграл және оны есептеу

Риман қосындылары және негізгі қасиеттер
Ньютон-Лейбниц формуласы. Есептеу әдістері

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: анықталған интегралды қосындылар шегі ретінде түсіну, негізгі теоремаларды білу және есептеу әдістерін қолдану.

Анықтама мен теория

Бөліктеу, қосындылар және шек.
Интегралдану және қасиеттер.
Орта мән және алғашқы функция.

Есептеу

Ньютон-Лейбниц формуласы.
Алмастыру және бөліктеп есептеу.
Симметрия мен жуықтау.

Осы дәрісте Риман интегралы қарастырылады; алдымен $a<b$ және функцияның шенелуі алынады.

Жинақталған шаманы қосындымен жуықтау

Өзгеретін f шамасының [a,b] аралығындағы жинақталған әсерін шағын бөліктердегі әсерлердің қосындысымен жуықтаймыз.

$$\text{шағын үлес} \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Бөліктер ұсақталған сайын жуықтау нақты шамаға ұмтылуы мүмкін. f теріс мәндер де қабылдай алатындықтан, қосынды таңбалы болады.

Геометриялық түсіндірме мен ауданнан айырмашылығы келесі дәрісте нақтыланады.

Кесіндіні бөліктеу және оның диаметрі

$$P: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Әр бөліктің ұзындығы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Бөліктеудің диаметрі ең үлкен бөліктің ұзындығына тең:

$$|P| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Тек бөліктер санының өсуі жеткіліксіз: ең үлкен бөліктің ұзындығы да нөлге ұмтылуы керек.

Риманның интегралдық қосындысы

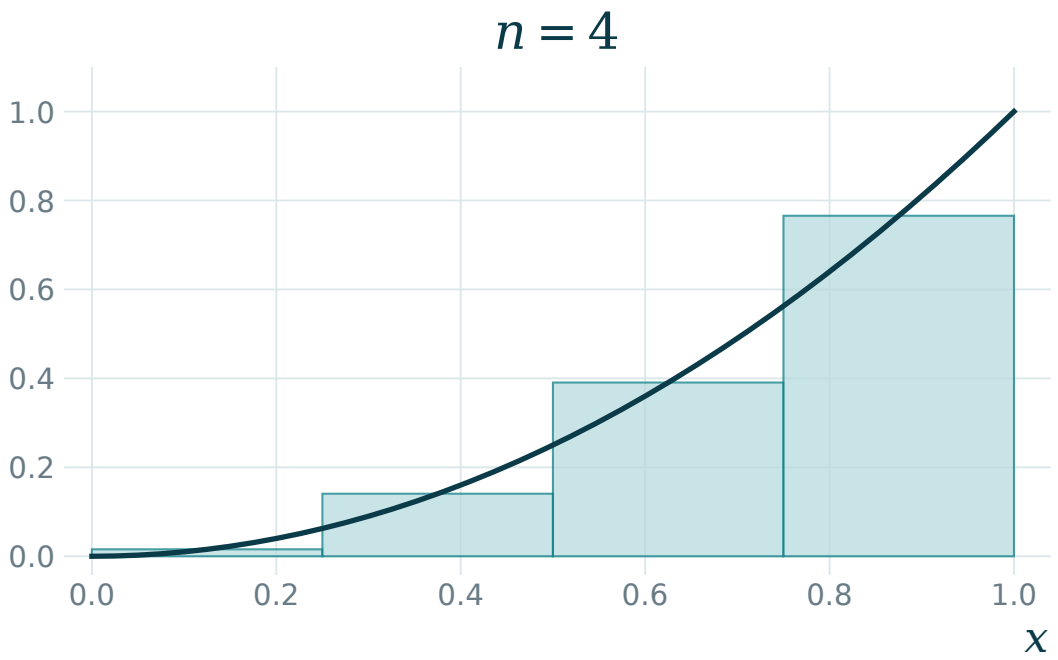
Әр $[x_{i-1}, x_i]$ бөлігінен кез келген ξ_i нүктесін таңдаймыз. Қосынды:

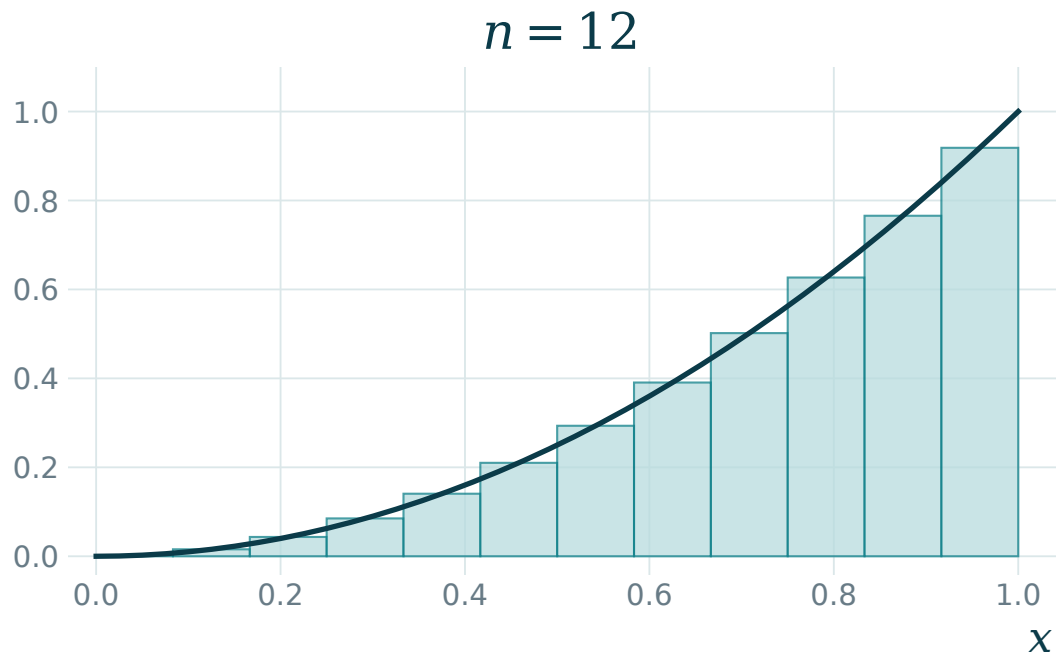
$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Таңдау нүктесі сол шет, оң шет, орта нүкте немесе бөліктің кез келген басқа нүктесі болуы мүмкін.

Интеграл бар болса, ұсақталған бөліктеулер үшін нәтиже осы таңдауға тәуелді болмайды.

Интегралдық қосындылардың көрінісі





$f(x)=x^2$, [0,1]. Тіктөртбұрыш биіктіктері орта нүктелерде алынған. Диаметр кішірейгенде қосынды интегралға жақындайды.

Риман интегралының анықтамасы

f функциясы [a,b]-де шенелген болсын. Егер барлық ε>0 үшін барлық жеткілікті ұсақ бөліктеулерде және барлық таңдау нүктелерінде:

$$\exists \delta > 0 : \quad |P| < \delta \implies |\sigma(f; P, \xi) - I| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, I саны f-тің [a,b]-дегі анықталған интегралы деп аталады.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Анықтамадан есептеу: x^2 интегралы

[0,1]-ді n тең бөлікке бөліп, оң шеттерді аламыз: $x_i = i/n$, $\Delta x = 1/n$.

$$\sigma_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \to \frac{1}{3}$$

x^2 үзіліссіз болғандықтан интегралданады. Сондықтан осы қосындылар тізбегінің шегі интеграл мәнін береді.

Тек бір тізбектің жинақталуы жалпы жағдайда интегралдануды өздігінен дәлелдемейді.

Дарбудың төменгі және жоғарғы қосындылары

$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ деп белгілейік.

$$L(f,P) = \sum_i m_i \Delta x_i, \qquad U(f,P) = \sum_i M_i \Delta x_i$$

$$L(f,P) \le \sigma(f;P,\xi) \le U(f,P)$$

f шенелген болғандықтан, әр бөліктегі инфимум мен супремум ақырлы.

Дарбу критерийі

Шенелген функция Риман бойынша интегралдануы үшін және тек сол үшін әр ε>0 санына сәйкес мынадай бөліктеу табылады:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

Төменгі және жоғарғы қосындылардың арасындағы саңылауды қалағанша кішірейтуге болады.

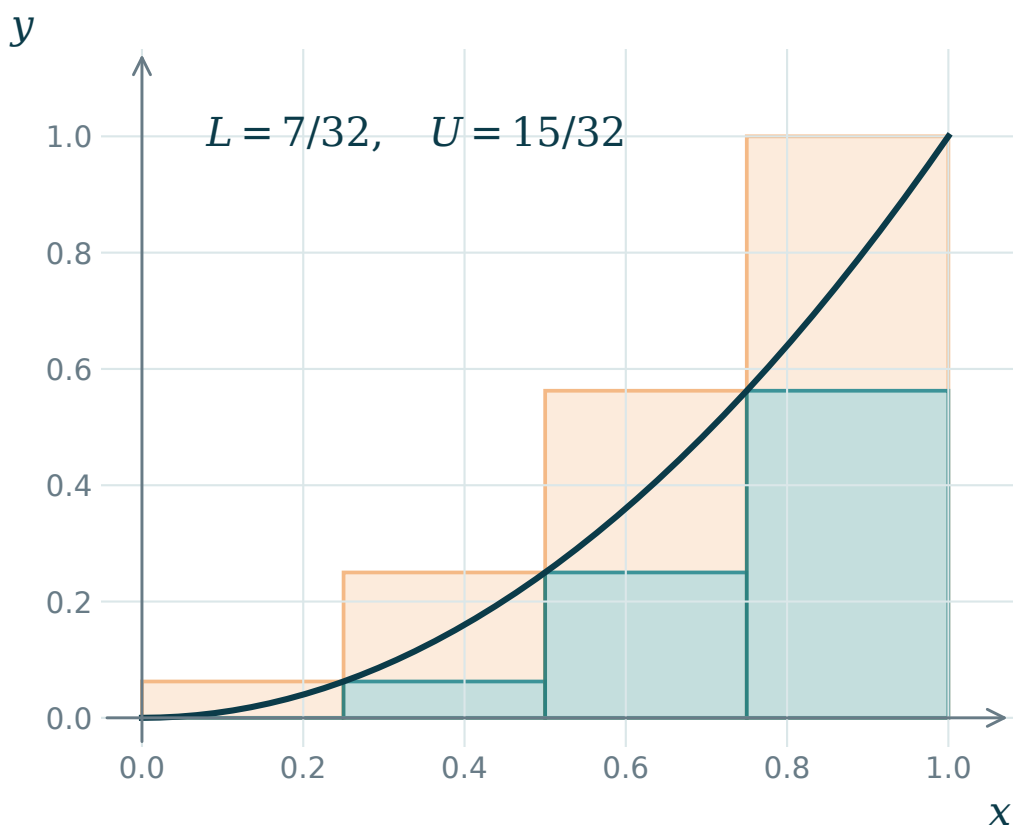
Бөліктеуді ұсақтау төменгі қосындыны кемітпейді, жоғарғы қосындыны арттырмайды.

Төменгі және жоғарғы бағалауға мысал

$$f(x) = x^2, \quad [0, 1], \quad n = 4$$

$L = 7/32, U = 15/32$. Нақты интеграл 1/3 осы екі санның арасында жатыр.

Бөліктер ұсақталған сайын екі жақтан алынған бағалаулар бір мәнге жақындайды.



Үзіліссіз функцияның интегралдануы

f функциясы [a,b]-де үзіліссіз болса, осы кесіндіде Риман бойынша интегралданады.

Дәлел идеясы: Кантор теоремасы бойынша f бірқалыпты үзіліссіз. Ұсақ бөліктердегі тербеліс бірдей шағын η санынан аспайды:

$$U - L = \sum_i (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \eta(b - a)$$

η-ны жеткілікті кіші таңдап, Дарбу критерийін қолданамыз.

Бөліктеп үзіліссіз функциялар

Кесіндіде шенелген, тек ақырлы сандағы нүктеде үзілісі бар және қалған бөліктерде үзіліссіз функция интегралданады.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2, \\ 2, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

Ақырлы нүктелердегі мәндерді басқа ақырлы мәндерге өзгерту интегралды өзгертпейді. Мысалы, f(1/2)=100 деп алуға болады.

Шенелу интегралдануға әрдайым жеткіліксіз

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

Әрбір оң ұзындықты аралықта рационал да, иррационал да сандар бар. Сондықтан кез келген бөлікте $m_i = 0$, $M_i = 1$.

$$L(f,P) = 0, \qquad U(f,P) = 1$$

Дарбу критерийі орындалмайды: бұл функция Риман бойынша интегралданбайды.

Анықталған интегралдың сызықтылығы

f және g [a,b]-де интегралдансын, α және β тұрақты сандар болсын. Сонда:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

Қасиет интегралдық қосындының сызықтылығынан және шектің сызықтылығынан шығады.

Анықталған интегралдың мәні сан болғандықтан, жауапқа +C қосылмайды.

Қосылғыштық және бағытталған шектер

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad a < c < b$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Бірінші қасиет интегралды бөліктерге бөліп есептеуге мүмкіндік береді. Шектердің орындарын ауыстыру таңбаны өзгертеді.

Реттілік және модуль арқылы бағалау

a<b және f,g интегралданатын болсын. f(x)≤g(x) барлық нүктеде орындалса:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Әсіресе, f≥0 болса, оның интегралы да теріс емес.

Интегралды шектер арқылы бағалау

a<b және m≤f(x)≤M болсын. f интегралданатын болса:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Тұрақты функциялардың интегралдары m(b−a) және M(b−a) шамаларына тең. Реттілік қасиетін қолданамыз.

Бұл бағалау интегралды дәл есептемей-ақ нәтиженің мүмкін аралығын көрсетеді.

Интегралдың орта мән теоремасы

f функциясы [a,b]-де үзіліссіз, a<b болсын. Кемінде бір $c \in [a, b]$ нүктесі үшін:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Интегралды b−a-ға бөлсек, функцияның ең кіші және ең үлкен мәндерінің арасындағы сан шығады. Аралық мән теоремасы f(c)-ні береді.

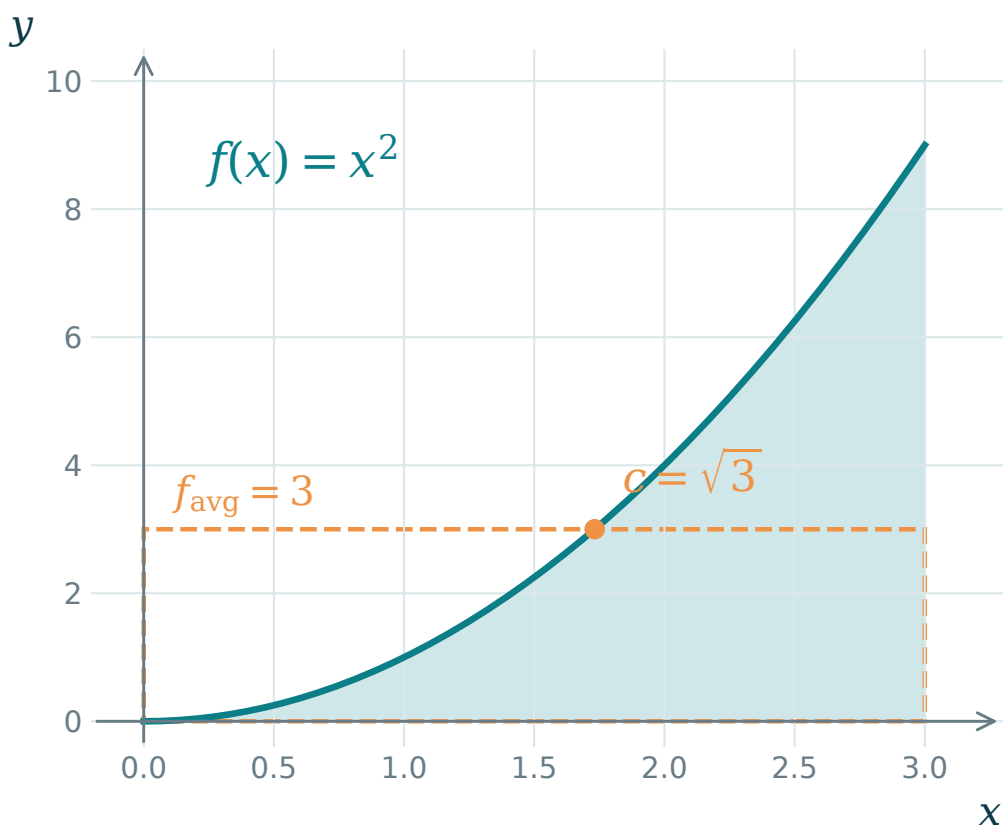
Орташа мәні: интегралды аралық ұзындығына бөлу.

Орташа мәнге мысал

$$f(x) = x^2, \qquad [a, b] = [0, 3]$$

Интеграл 9-ға, аралық ұзындығы 3-ке тең. Функцияның орташа мәні 3 болады.

$$f(c) = 3, \qquad c = \sqrt{3}$$



Суреттегі тіктөртбұрыштың ауданы қисық астындағы ауданға тең.

Жоғарғы шегі айнымалы интеграл

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]$$

Интегралдау айнымалысы t, ал x жоғарғы шек ретінде қызмет етеді. f шенелген әрі интегралданатын болса:

$$|A(x+h) - A(x)| \le M|h|, \qquad |f| \le M$$

Демек, A үзіліссіз. Интеграл жоғарғы шек өзгергенде үздіксіз өзгереді.

Интегралдық есептеудің негізгі теоремасы

f [a,b]-де үзіліссіз болсын. $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ функциясы әр ішкі x нүктесінде дифференциалданады және:

$$A'(x) = f(x), \qquad a < x < b$$

Жоғарғы шегі айнымалы интеграл f функциясының алғашқы функциясын береді.

Бұл теорема анықталған интеграл мен туындыны тікелей байланыстырады.

Негізгі теореманың дәлел идеясы

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\bigl(f(t)-f(x)\bigr)\,dt$$

f x нүктесінде үзіліссіз. Сондықтан h жеткілікті кіші болғанда x пен x+h арасындағы барлық t үшін |f(t)−f(x)|<ε.

$$\left|\frac{A(x+h)-A(x)}{h}-f(x)\right|\le\varepsilon$$

Бағалау h-тың екі таңбасы үшін де дұрыс. Шекке өткенде A′(x)=f(x).

Үзіліссіз функцияның алғашқы функциясы бар

10-дәрістегі бар болу тұжырымы енді негізделді: үзіліссіз f үшін жоғарғы шегі айнымалы интеграл алғашқы функция болады.

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$$

Кез келген ашық аралықта x_0 нүктесін бекітеміз. Әр x үшін интеграл x_0 мен x арасындағы жабық кесіндіде алынады.

Элементар формуланың болмауы алғашқы функцияның жоқ екенін білдірмейді.

Ньютон-Лейбниц формуласы

f [a,b]-де үзіліссіз болсын. F [a,b]-де үзіліссіз және (a,b)-де F′=f теңдігін қанағаттандырсын. Сонда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Алдымен алғашқы функцияны табамыз, содан кейін жоғарғы және төменгі шектердегі мәндерінің айырмасын аламыз.

Анықталған интегралды әр есепте интегралдық қосындыдан қайта табу қажет емес.

Ньютон-Лейбниц формуласының дәлелі

$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ десек, (a,b)-де $A' = f = F'$. Сондықтан F−A тұрақты.

$$F(x) - A(x) = F(a), \qquad A(a) = 0$$

Шеткі нүктелердегі үзіліссіздік теңдікті x=b нүктесіне жеткізеді. Осыдан A(b)=F(b)−F(a) шығады.

Дәлел негізгі теорема мен туындысы нөл болатын функция туралы теоремаға сүйенеді.

Көпмүшенің анықталған интегралы

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$$

Алғашқы функция $F(x)=x^3-x^2+x$. Шектерді ретімен қоямыз:

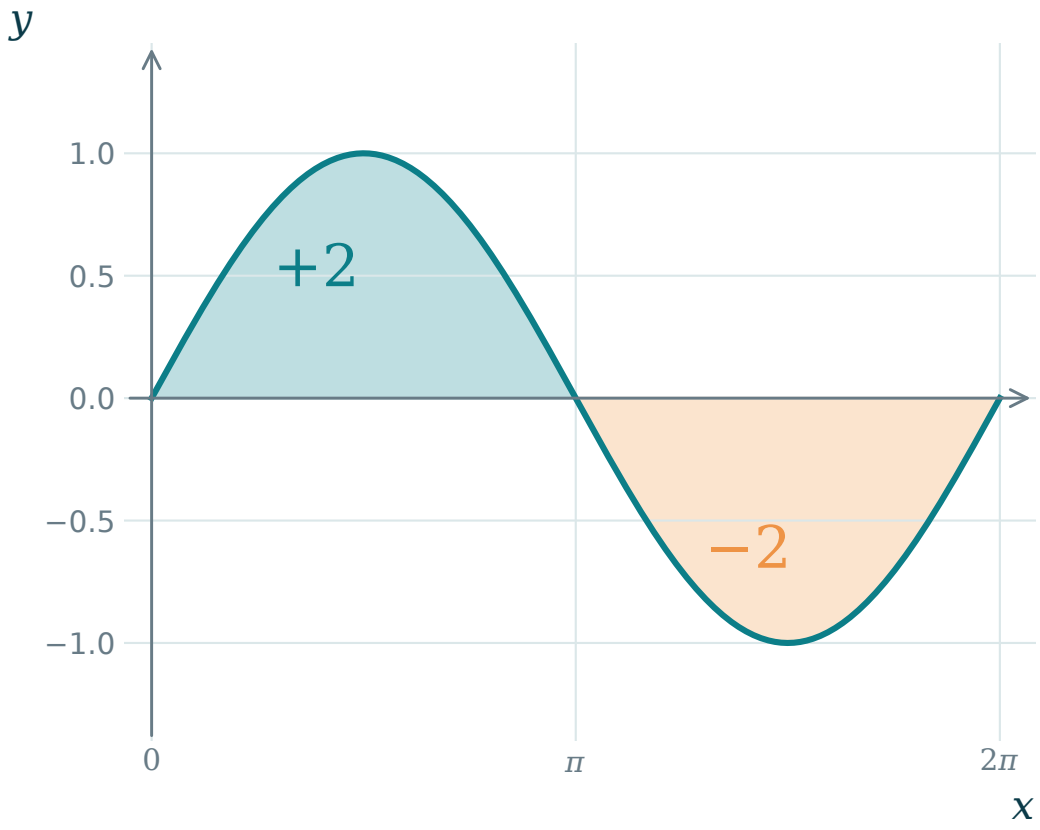
$$\left[x^3 - x^2 + x\right]_1^2 = (8 - 4 + 2) - (1 - 1 + 1) = 5$$

Төменгі шектегі бүкіл өрнек жақшаға алынып, содан кейін шегеріледі.

Синус интегралының таңбалы мәні

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$



Толық периодта оң және теріс үлестер бір-бірін өтейді. Нөлдік интеграл функцияның нөл екенін білдірмейді.

Логарифмнің анықталған интегралы

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

11-дәрістен алғашқы функция $x \ln x - x$ екені белгілі. Аралықта логарифм үзіліссіз:

$$\left[x \ln x - x\right]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Анықталған интегралда интегралдау тұрақтысы айырмада жойылады.

Анықталған интегралда алмастыру

$x = \varphi(t)$ үздіксіз дифференциалдансын, f оның мәндер аралығында үзіліссіз болсын. Сонда:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Формула F(φ(t)) күрделі алғашқы функциясына Ньютон-Лейбниц формуласын қолданудан шығады.

Мұнда f алмастырудың барлық аралық мәндерінде анықталуы керек.

Алмастыруда жаңа шектерді есептеу

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx, \qquad u = x^2, \quad du = 2x\,dx$$

x=0 кезінде u=0; x=1 кезінде u=1. Сондықтан:

$$\int_0^1 e^u\,du = \left[e^u\right]_0^1 = e - 1$$

Шектер u арқылы ауыстырылғандықтан, есептеудің соңында x-ке оралу қажет емес.

Алмастыруда шектердің бағыты өзгерсе

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad u = 1-x^2, \quad du = -2x\,dx$$

x=0 кезінде u=1, x=1 кезінде u=0. Минус таңбасын шектерді ауыстырумен біріктіреміз:

$$-\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}$$

Алмастырудағы айнымалы мен шектер

Бірінші жол	Жаңа айнымалыға сәйкес жаңа шектерді есептеп, интегралды сол айнымалымен аяқтау.
Екінші жол	Алғашқы функцияны бастапқы x арқылы жазып алып, бастапқы a,b шектерін қою.
Қате араластыру	u бойынша табылған алғашқы функцияға x-ке арналған шектерді тікелей қоюға болмайды.

Анықталған интегралды бөліктеп есептеу

u және v [a,b]-де үздіксіз дифференциалданатын болсын. Көбейтінді ережесінен:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

Алдыңғы дәрістегі формуладан айырмашылығы: uv көбейтіндісі де екі шеткі нүктеде есептеледі.

Қалған интегралдың шектері бастапқы a және b болып қалады.

Бөліктеп есептеу: x·exp x

$$\int_0^1 xe^x\,dx, \qquad u = x, \quad dv = e^x\,dx$$

$$\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1)$$

$$\int_0^1 xe^x\,dx = 1$$

Дайын алғашқы функция $e^x(x-1)$ арқылы есептеу де осы нәтижені береді.

Бөліктеп есептеу: x·cos x

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$$

u=x, dv=cos x dx десек, du=dx, v=sin x. Сондықтан:

$$\left[x\sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Нәтиже оң: бастапқы функция [0,π/2]-де теріс емес.

Симметрия арқылы есептеу

f [−a,a]-да интегралдансын. u=−x алмастыруы симметрияны пайдалануға мүмкіндік береді:

$$f(-x) = -f(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$f(-x) = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Бірінші жағдай тақ, екіншісі жұп функцияға сәйкес келеді.

Симметрияға екі мысал

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$$

Интегралдау аралығы нөлге қатысты симметриялы болуы керек. Симметрияның түрі функцияның өзін тексеріп анықталады.

Ньютон-Лейбниц: шарттарды тексеру

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$$

Нөл маңында функция шенелмеген және бүкіл [−1,1] кесіндісінде анықталмаған. Сондықтан осы кесіндіде кәдімгі Риман интегралы жоқ.

ln|1|−ln|−1|=0 деп жазу бұл есепті шешпейді: алғашқы функция нөл арқылы өтетін бір аралықта берілмеген.

Орта нүктелер мен трапециялар әдістері

f [a,b]-де үзіліссіз, h=(b−a)/n болсын. Жуықтау қосындылары:

$$M_n = h \sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 1/2)h)$$

$$T_n = h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right)$$

n → ∞ кезінде екі қосынды да анықталған интегралға ұмтылады.

Жуық мәндерді дәл мәнмен салыстыру

$$f(x) = x^2, \qquad [0,1], \qquad n = 2$$

$$M_2 = \frac{5}{16} = 0.3125, \qquad T_2 = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$M_2 < \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} < T_2$$

Осы дөңес квадраттық функция үшін M_2 төменгі, T_2 жоғарғы баға береді.

Жиі кездесетін қателер

Төменгі шек	$F(b)-F(a)$ айырмасында $F(a)$-ның бүкіл өрнегін шегеру керек.
Еркін тұрақты	Сандық анықталған интеграл жауабына $+C$ қосылмайды.
Алмастыру	Жаңа айнымалы мен интегралдау шектері бір-біріне сәйкес болуы тиіс.
Теорема шарттары	Аралықтағы анықталу, үзіліссіздік және шенелу мәселелері есептеуге дейін тексеріледі.

Өзіндік жұмыс

1. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$ интегралын есептеңіз.

2. $\int_1^4 dx/x$ интегралын есептеңіз.

3. $\int_0^1 x/(1 + x^2)\,dx$ интегралын есептеңіз.

4. $\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx$ интегралын есептеңіз.

5. $\int_{-2}^2 (x^3 + x^2)\,dx$ интегралын есептеңіз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $14/3$.

2. $\ln 4$.

3. $(1/2)\ln 2$; u=1+x² алмастыруында шектер 1 және 2 болады.

4. $[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/2} = 1$.

5. Тақ бөлік нөл береді; $2\int_0^2 x^2\,dx = 16/3$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Риман интегралында бөліктеудің диаметрі неге нөлге ұмтылуы керек?

2. Дарбу критерийі төменгі және жоғарғы қосындыларды қалай байланыстырады?
3. Үзіліссіздік интегралдануды қалай қамтамасыз етеді?

4. Жоғарғы шегі айнымалы интегралдың туындысы неге тең?

5. Ньютон-Лейбниц формуласы қандай шарттармен қолданылады?

6. Алмастыру мен бөліктеп есептеуде шектер қалай ескеріледі?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.