Математикалық талдау 1

2-дәріс

Сандық тізбектің шегі

Жинақталу және шектердің қасиеттері
Монотонды тізбектер және е саны

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Жиындар, тізбектер және шектер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: тізбек шегінің анықтамасын қолдану, шектерді есептеу және жинақталуды дәлелдеу.

Шектер теориясы

ε және N арқылы анықтама.
Шенелу және шексіз үлкен тізбектер.
Шектерге қолданылатын амалдар.

Жинақталу әдістері

Қысу теоремасы және ішкі тізбектер.
Монотонды тізбек туралы теорема.
e санының анықтамасы.

Шекті есептеу мен шектің бар болуын дәлелдеу бірін-бірі толықтырады.

Тізбектің шегі туралы түсінік

$x_n = 1/n$ тізбегінің мүшелері n өскен сайын 0 санына жақындайды.

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n}, \quad \dots$$

0-дің кез келген алдын ала берілген маңайына белгілі бір нөмірден бастап тізбектің барлық мүшелері кіреді.

Осы қасиет $x_n \to 0$ немесе $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ деп белгіленеді.

Тізбек шегінің қатаң анықтамасы

Кез келген оң қателік үшін одан кейінгі барлық мүшелер a-дан осы қателіктен аз қашықтықта жататын нөмір табылса, a тізбектің шегі болады.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |x_n - a| < \varepsilon$$

N саны ε-ге тәуелді болуы мүмкін. Таңдалған N-нен кейін бір шарт барлық n үшін орындалады.

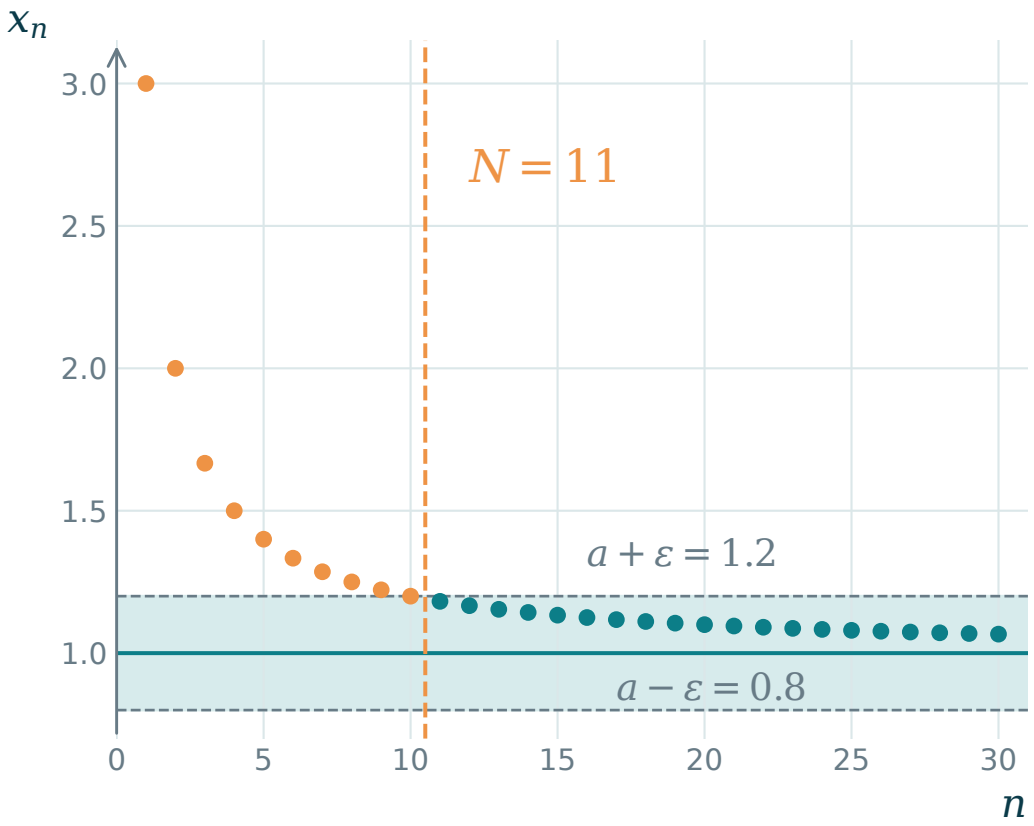
Ақырлы шегі бар тізбек жинақталатын тізбек деп аталады.

Шектің геометриялық мағынасы

$$x_n = 1 + \frac{2}{n}, \qquad a = 1$$

$\varepsilon = 0.2$ болсын. $2/n < 0.2$ шарты n>10 кезінде орындалады.

N=11 деп аламыз. Осы нөмірден бастап барлық нүктелер боялған жолақтың ішінде жатады.



Анықтама бойынша дәлелдеу

$\lim 1/n = 0$ екенін дәлелдейік. Кез келген $\varepsilon > 0$ берілсін.

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$N > 1/\varepsilon$ болатын натурал N таңдаймыз. Сонда барлық $n \geq N$ үшін қажетті баға орындалады.

Мысалы, $\varepsilon = 0.01$ болса, N=101 жарайды. N=100 кезінде қатаң теңсіздік орындалмайды.

Нөлдік емес шекке мысал

$$x_n = \frac{3n+1}{n+2}, \qquad a = 3$$

$$|x_n - 3| = \left|\frac{-5}{n+2}\right| = \frac{5}{n+2} \le \frac{5}{n}$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $N > 5/\varepsilon$ таңдаймыз. Онда $n \ge N$ кезінде $|x_n - 3| < \varepsilon$.

Айырманы ықшамдау N нөмірін таңдауға мүмкіндік береді.

Тізбек шегінің жалғыздығы

Тізбектің екі әртүрлі a және b шегі бар делік. $\varepsilon = |a-b|/3 > 0$ алайық.

Жеткілікті үлкен n үшін $|x_n - a| < \varepsilon$ және $|x_n - b| < \varepsilon$ бірге орындалады.

$$|a-b| \le |a-x_n| + |x_n - b| < \frac{2}{3}|a-b|$$

Бұл қайшылық. Демек, жинақталатын тізбектің шегі жалғыз болады.

Жинақталатын тізбектің шенелуі

$x_n \to a$ болсын. $\varepsilon = 1$ үшін $N \geq 2$ табамыз. $n \geq N$ кезінде:

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Алғашқы ақырлы санды мүшелерді де бір тұрақтымен бағалауға болады:

$$M = \max\{|a| + 1,\ |x_1|, \dots, |x_{N-1}|\}$$

Сонда барлық n үшін $|x_n| \leq M$.

Шенелу жинақталуға жеткіліксіз

$x_n = (-1)^n$ тізбегінің барлық мүшелері [-1,1] кесіндісінде жатады.

$$x_{2k} = 1, \qquad x_{2k-1} = -1$$

Жұп және тақ мүшелер әртүрлі сандардың маңында қалады. Барлық мүшелер бір ғана санға жақындай алмайды.

Ішкі тізбектер арқылы қатаң дәлелді төменде келтіреміз.

Шексіз аз тізбектер

Шегі нөлге тең тізбек шексіз аз тізбек деп аталады.

$$\alpha_n \to 0$$

Шексіз аз тізбектердің қосындысы және тұрақты санға көбейтіндісі шексіз аз болады. Шенелген тізбекпен көбейтіндісі де нөлге ұмтылады.

$$|b_n| \le M, \quad \alpha_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad b_n\alpha_n \to 0$$

Мысалдар: $1/n$, $(-1)^n/n$, $1/n^2$.

Шексіз үлкен тізбектер

Мүшелерінің модульдері кез келген оң шекарадан белгілі бір нөмірден бастап асып кетсе, тізбек шексіз үлкен деп аталады.

$$\forall M > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : \; |x_n| > M$$

Бұл $|x_n| \to +\infty$ деп белгіленеді. Мүшелердің таңбасы тұрақты болуы міндетті емес.

Мысалы, $x_n = (-1)^n n$ модуль бойынша шексіз үлкен.

Оң және теріс шексіздікке ұмтылу

$x_n \to +\infty$

Кез келген $M > 0$ үшін жеткілікті үлкен n-дерде $x_n > M$.
Мысалы, $x_n = n$.

$x_n \to -\infty$

Кез келген $M > 0$ үшін жеткілікті үлкен n-дерде $x_n < -M$.
Мысалы, $x_n = -n$.

Ақырлы шек

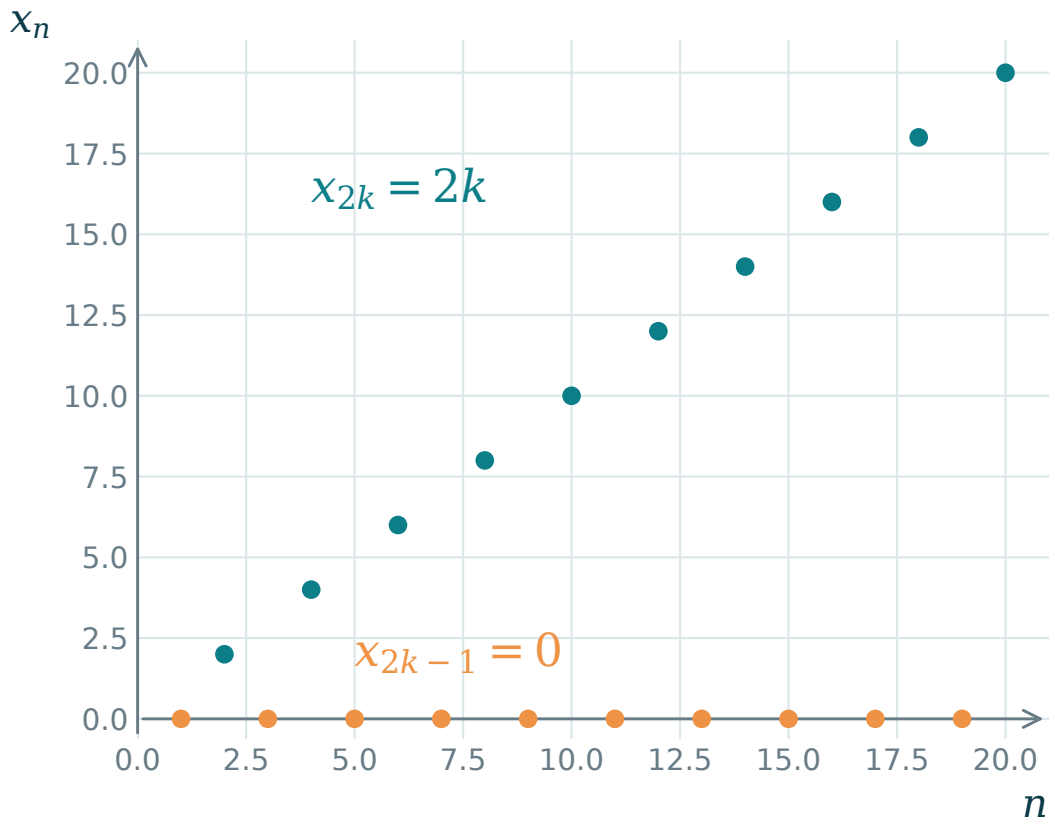
Бұл екі жағдайда да тізбек нақты санға жинақталмайды. $\pm\infty$ нақты сандар емес.

Шенелмеген және шексіз үлкен тізбектер

$$x_n = \begin{cases} n, & n \text{ жұп}, \\ 0, & n \text{ тақ}. \end{cases}$$

Тізбек жоғарыдан шенелмеген: жұп мүшелер өседі. Бірақ тақ мүшелердің бәрі 0-ге тең.

Сондықтан бұл тізбек шексіз үлкен емес.



Кері шамалар және шек

Қарастырылатын мүшелер белгілі бір нөмірден бастап нөлден өзге болсын.

$$|x_n| \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_n} \to 0$$

$$\alpha_n \to 0, \quad \alpha_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{\alpha_n}\right| \to +\infty$$

Кері шаманың таңбасы туралы қорытынды жасау үшін бастапқы тізбектің таңбасын да ескеру қажет.

Шектердің арифметикалық қасиеттері

$x_n \to a$, $y_n \to b$ және c тұрақты сан болсын.

$$x_n + y_n \to a + b, \qquad cx_n \to ca$$

$$x_n y_n \to ab$$

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b} \qquad (b \neq 0)$$

$b \neq 0$ шарты бөлімнің жеткілікті үлкен n үшін нөлден өзге болуын қамтамасыз етеді.

Рационал өрнектің шегін есептеу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 3}$$

Алым мен бөлімді n-нің ең жоғары дәрежесіне бөлеміз:

$$\frac{5 - 2/n + 1/n^2}{2 + 3/n^2} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

Бөлімнің шегі 2-ге тең. Ол нөлдік емес болғандықтан, бөліндінің шегі туралы теореманы қолданамыз.

Анықталмағандықтар

$0/0$	Алым мен бөлімнің нөлге ұмтылуы бөліндінің шегін бірден анықтамайды.
∞/∞	Өсу жылдамдықтарын салыстыру керек. Мысалы, ең жоғары дәрежеге бөлеміз.
$\infty - \infty$	Айырманы бір өрнекке біріктіру немесе түйіндес өрнекке көбейту көмектеседі.
$0 \cdot \infty$	Көбейтіндіні бөлінді түріне келтіруге болады.

Түбірі бар айырманы түрлендіру

$$\sqrt{n^2+n}-n$$

Түйіндес өрнекке көбейтеміз және n-ге бөлеміз:

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}\longrightarrow\frac{1}{2}$$

Қысу теоремасы

Белгілі бір нөмірден бастап төмендегі теңсіздіктер орындалсын:

$$a_n \le x_n \le b_n, \qquad a_n \to L, \quad b_n \to L$$

$$x_n \to L$$

Дәлел: $\varepsilon > 0$ үшін екі шеткі тізбек те $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ аралығына кірген соң, олардың арасындағы x_n де осы аралықта жатады.

Қысу теоремасын қолдану

Синус шенелген болғандықтан, барлық натурал n үшін:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Екі шеткі тізбектің шегі 0-ге тең. Сондықтан $\sin n/n \to 0$.

Тізбектің алымындағы тербеліс бөлімнің өсуімен басылады.

Геометриялық тізбектің шегі

$$x_n = q^n$$

$|q| < 1$ болса, $q^n \to 0$. q=1 болса, шек 1-ге тең. q=-1 кезінде тізбек жинақталмайды.

q>1 кезінде $q^n \to +\infty$. q<-1 кезінде $|q^n| \to +\infty$, ал таңбалар алмасады.

$0 < |q| < 1$ үшін $|q| = 1/(1+c)$, c>0 деп алып, $|q|^n \leq 1/(1+nc) \to 0$ бағасын қолдануға болады.

Жинақталатын тізбектің ішкі тізбектері

Жинақталатын тізбектің кез келген ішкі тізбегі сол шекке жинақталады.

$$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad x_{n_k} \to a$$

Дәлел: $n_k \geq k$. Сондықтан k жеткілікті үлкен болса, $n_k \geq N$ болады да, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ орындалады.

Тізбектің алғашқы ақырлы санды мүшелерін өзгерту оның шегін өзгертпейді.

Ішкі тізбектер және жинақталмау

$$x_n = (-1)^n, \qquad x_{2k} \to 1, \qquad x_{2k-1} \to -1$$

Егер бастапқы тізбек a санына жинақталса, оның жұп және тақ ішкі тізбектері де a санына жинақталуы тиіс.

Шектің жалғыздығы бойынша a=1 және a=-1 болуы керек. Бұл мүмкін емес.

Әртүрлі шектерге ұмтылатын екі ішкі тізбек бастапқы тізбектің жинақталмайтынын көрсетеді.

Монотонды тізбектер

Кемімейтін	Барлық n үшін $x_{n+1} \geq x_n$.
Өспейтін	Барлық n үшін $x_{n+1} \leq x_n$.
Қатаң монотонды	Тиісті теңсіздік барлық n үшін қатаң болады.
Тексеру тәсілі	$x_{n+1} - x_n$ айырмасының таңбасын зерттейміз. Оң мүшелер үшін қатынасын да қолдануға болады.

Монотонды тізбектің жинақталуы

Кемімейтін және жоғарыдан шенелген тізбек ақырлы шекке жинақталады.

$$x_n \leq x_{n+1} \leq M \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$$

Өспейтін және төменнен шенелген тізбек үшін де ұқсас тұжырым орындалады.

Теорема шектің бар болуын көрсетеді. Оның мәнін қосымша есептеу қажет болуы мүмкін.

Монотонды тізбек туралы теореманың дәлелі

Кемімейтін (x_n) тізбегі жоғарыдан шенелсін. Нақты сандардың толықтығы бойынша $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ бар.

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $x_N > a - \varepsilon$ болатын N табылады. Монотондық бойынша $n \geq N$ кезінде:

$$a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a$$

Осыдан $|x_n - a| < \varepsilon$. Демек, $x_n \to a$.

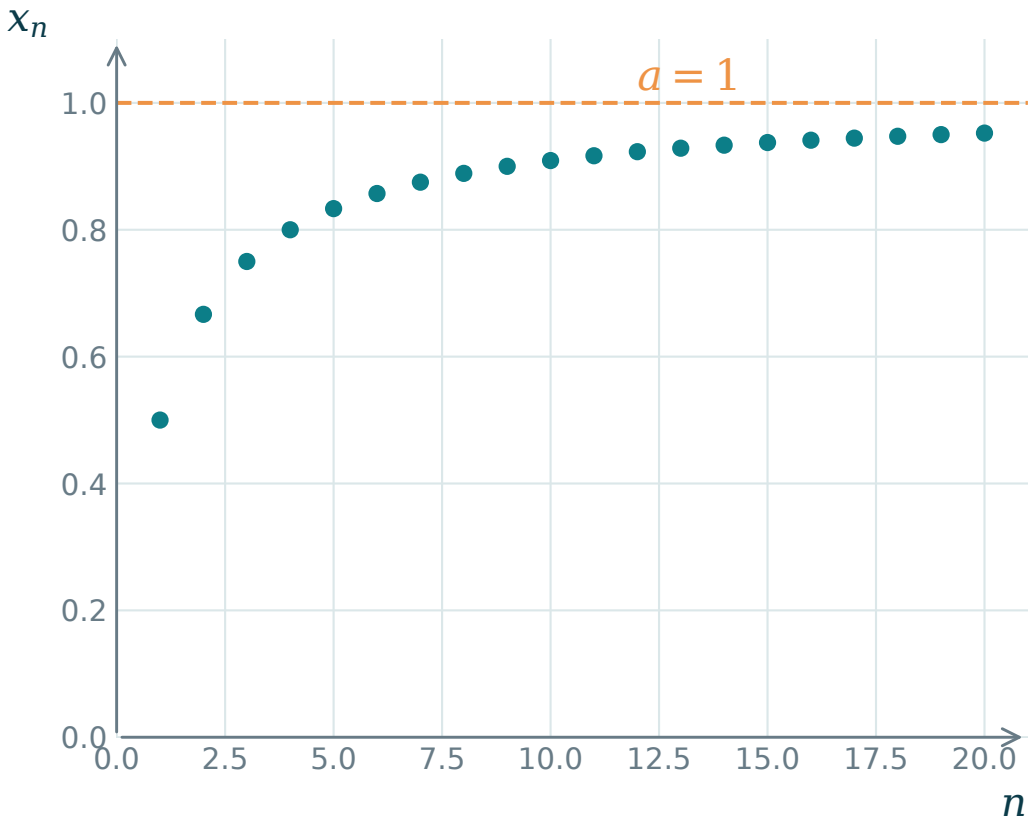
Монотондық пен шенелудің рөлі

Монотонды, шенелген	$x_n = 1 - 1/n$ тізбегі 1 санына жинақталады.
Монотонды, шенелмеген	$x_n = n$ тізбегі ақырлы шекке жинақталмайды.
Шенелген, монотонды емес	$x_n = (-1)^n$ жинақталмайды, ал $y_n = (-1)^n/n$ жинақталады.

Монотондықты тексеруге мысал

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \qquad \frac{1}{2} \le x_n < 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$



Тізбек өседі және жоғарыдан шенелген.
Оның шегі бар, ал тікелей есептеу шектің 1-ге тең екенін береді.

Рекуррентік тізбектің шегі

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$

Индукция бойынша $1 \le x_n \le 2$. Сонымен қатар $x_2 > x_1$, ал түбірдің өсуі $x_{n+1} \ge x_n$ теңсіздігін сақтайды.

Монотондық пен шенелуден $x_n \to L$, $1 \le L \le 2$. $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$ теңдігінде шекке өтеміз:

$$L^2 = 2 + L \quad \Longrightarrow \quad L = 2$$

e санының анықтамасы

Келесі тізбек өседі және жоғарыдан шенелген. Оның шегі e саны деп аталады.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Жинақталуды дәлелдеу үшін монотондық пен шенелуді алгебралық жолмен тексереміз.

Бұл анықтама туынды мен интеграл ұғымдарына сүйенбейді.

e тізбегінің монотондығы

$a_n = (1 + 1/n)^n$ болсын. Бином формуласы бойынша:

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

n өскенде әрбір бұрынғы оң көбейткіш өседі. Қосындыға тағы бір оң қосылғыш қосылады. Сондықтан тізбек қатаң өседі.

Мұнда $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$, $0! = 1$. n=1 кезінде қосынды бос және $a_1 = 2$.

e тізбегінің жоғарыдан шенелуі

$k! \geq 2^{k-1}$ бағасы k=1,2,... үшін орындалады. Бином коэффициенттерін бағалаcақ:

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$a_n \leq 3 - 2^{1-n} < 3$$

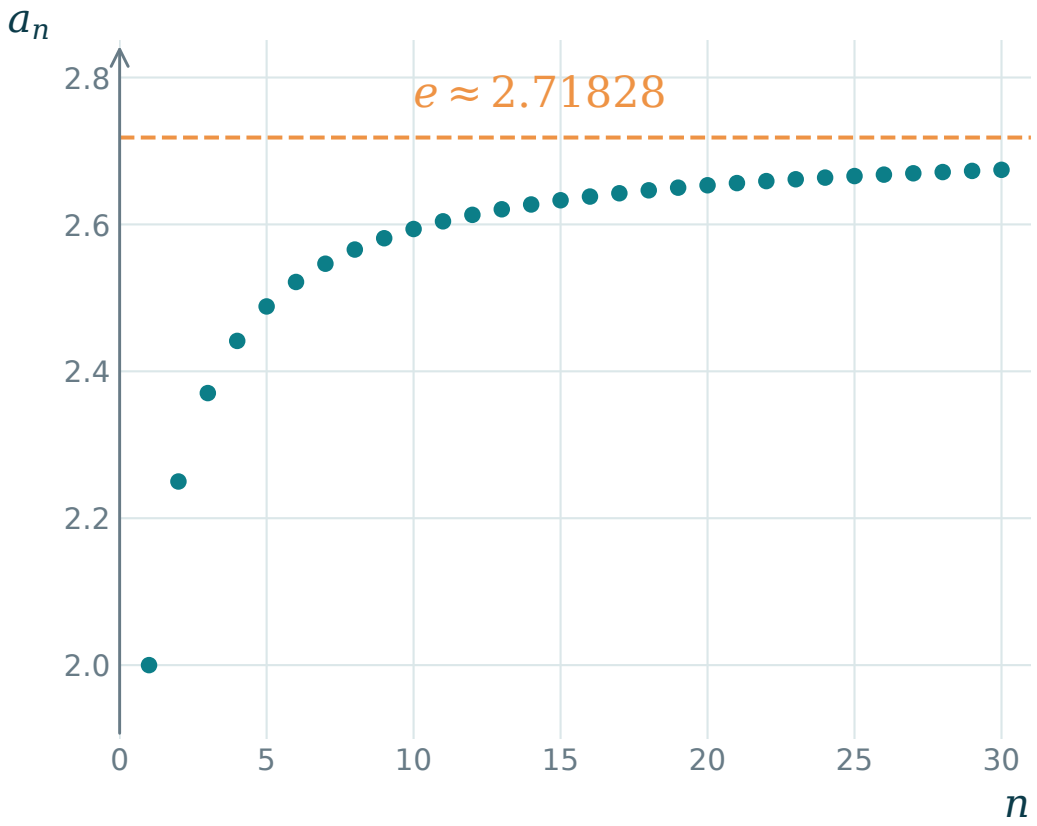
Тізбек өседі және 3-тен кіші. Монотонды тізбек туралы теорема бойынша оның ақырлы шегі бар.

e санына жуықтау

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$a_1 = 2$, $a_2 = 2.25$, $a_{10} \approx 2.59374$,
$a_{100} \approx 2.70481$.

$e \approx 2.718281828$. Тізбек осы санға төменнен жақындайды.



Шекті есептеуде жиі кездесетін қателер

Анықталмағандық	$0/0$ және ∞/∞ дайын жауап болмайды. Өрнекті түрлендіру керек.
Шенелу	Шенелген тізбектің шегі міндетті түрде бар емес.
Бөлімнің шегі	Бөліндінің шегі туралы теоремада бөлімнің шегі нөлдік емес болуы қажет.
Монотондық	Монотондықпен бірге тиісті жақтан шенелу де тексеріледі.

Өзіндік жұмыс

1. $\lim_{n\to\infty}(4n+3)/(2n-1)$ табыңыз.

2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$ табыңыз.

3. $(-1)^n/(n+1)$ тізбегінің шегін табыңыз.

4. $x_{2k}=2k$, $x_{2k-1}=0$ тізбегі жинақтала ма?

5. Барлық $n\geq N$ үшін $1/n<0.01$ орындалатын ең кіші N табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. Шегі 2. Алым мен бөлімді n-ге бөлеміз.

2. Шегі 1. Түрлендіргеннен кейін $2/(\sqrt{1+2/n}+1) \to 1$.

3. Шегі 0. Абсолют шамасы $1/(n+1)$ арқылы бағаланады.

4. Жинақталмайды. Тақ ішкі тізбек 0-ге тең, жұп ішкі тізбек шенелмеген.

5. N=101. n=100 кезінде қатаң теңсіздік орындалмайды.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Шектің анықтамасында ε мен N қандай рөл атқарады?
2. Жинақталатын тізбек неліктен шенелген болады?
3. Шенелмеген тізбек пен шексіз үлкен тізбек қалай ажыратылады?
4. Қысу теоремасы қандай жағдайда қолданылады?
5. Монотонды тізбектің жинақталуы үшін қандай шарт қажет?
6. e саны қай тізбектің шегі арқылы анықталады?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.