Математикалық талдау 1

10-дәріс

Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Негізгі қасиеттер мен интегралдар кестесі
Тікелей интегралдау және нәтижені тексеру

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: алғашқы функцияны тану, анықталмаған интегралдың мағынасын түсіну және негізгі кестені қолдану.

Ұғымдар мен қасиеттер

Дифференциалдауға кері есеп.
Алғашқы функциялар жиыны.
Тұрақты және анықталу аралығы.

Интегралдау дағдылары

Кестелік интегралдар.
Алгебралық түрлендіру.
Туынды алу арқылы тексеру.

Негізгі тексеру: табылған алғашқы функцияның туындысы бастапқы функцияға тең болуы керек.

Алғашқы функцияның анықтамасы

I ашық аралығының әрбір нүктесінде F функциясы дифференциалданып, оның туындысы f-ке тең болсын.

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in I$$

Онда F функциясы I аралығындағы f функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

Дифференциалдау F-тен f-ке өтеді; алғашқы функцияны табу осы бағытты кері қайтарады.

Анықтамаға қарапайым мысал

$$f(x) = 3x^2, \qquad F(x) = x^3$$

$F'(x) = 3x^2 = f(x)$. Демек, x^3 алғашқы функция болады. Тұрақты қоссақ, туынды өзгермейді:

$$(x^3 + C)' = 3x^2, \qquad C \in \mathbb{R}$$

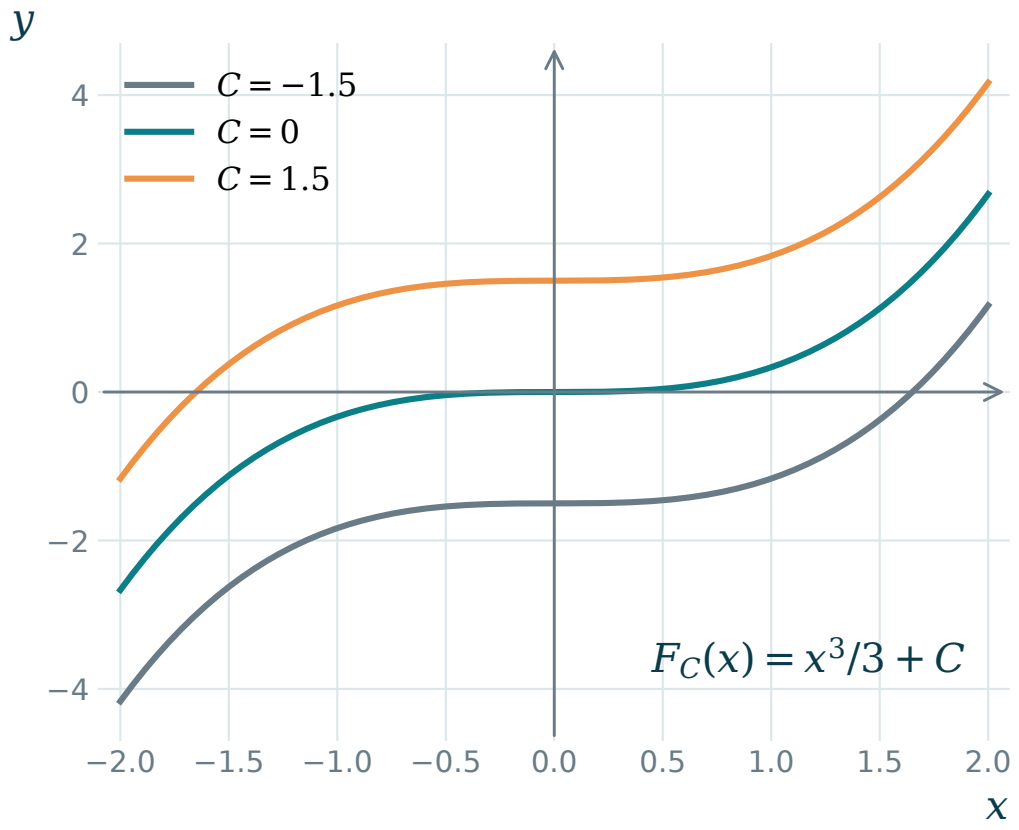
Алғашқы функция біреу ғана емес. Олардың барлығын сипаттау қажет.

Алғашқы функциялар графиктерінің тобы

$$f(x) = x^2, \qquad F_C(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Графиктер бір-бірінен тек тік бағыттағы ығысумен ерекшеленеді. Бірдей x нүктесіндегі жанамаларының көлбеулігі бірдей.

Барлық C үшін $F_C'(x) = x^2$.



Екі алғашқы функцияның айырмасы

F және G бір I аралығында f-тің алғашқы функциялары болсын. Айырмасының туындысы:

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$$G(x) - F(x) = C$$

7-дәрістегі теорема бойынша аралықта туындысы нөл болатын функция тұрақты. Сондықтан барлық алғашқы функция F+C түрінде болады.

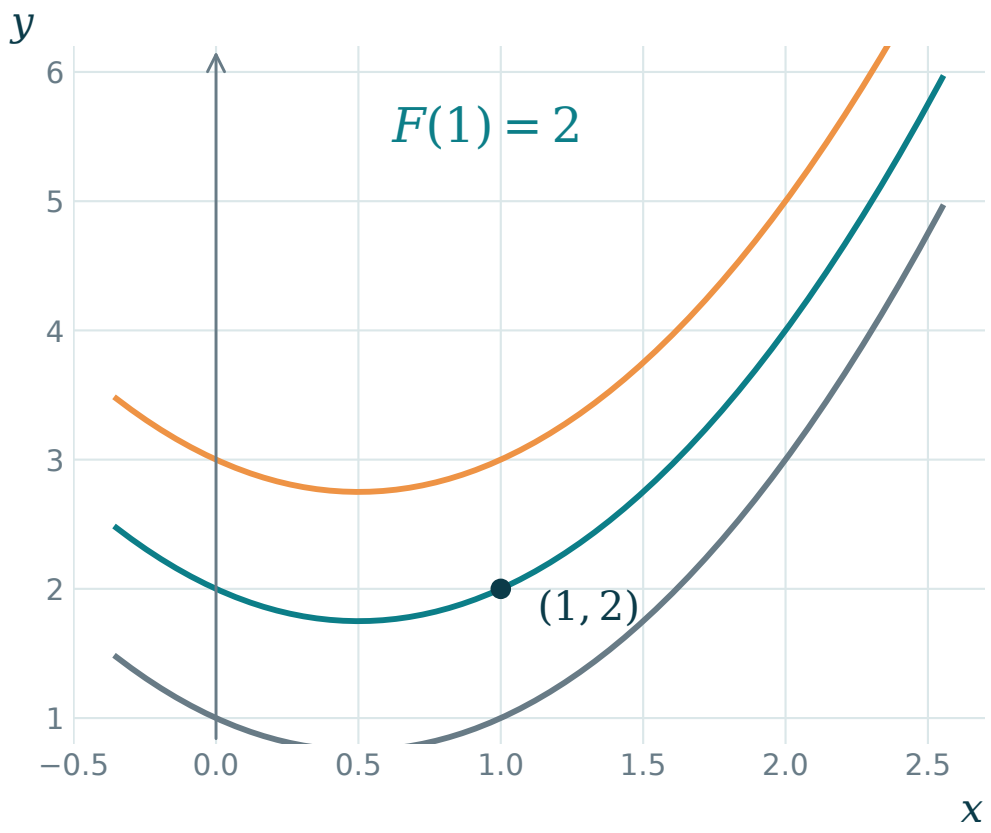
Бір нүктедегі мән арқылы тұрақтыны табу

$$F'(x) = 2x - 1, \qquad F(1) = 2$$

Жалпы түрі: $F(x)=x^2-x+C$. Берілген мәнді қойсақ, $F(1)=C=2$.

Қосымша шарт графиктер тобынан бір графикті таңдайды.

$$F(x) = x^2 - x + 2$$



Анықталмаған интегралдың белгіленуі

f функциясының I аралығындағы барлық алғашқы функцияларының жиыны анықталмаған интеграл деп аталады.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F' = f$$

f(x) интеграл астындағы функция, $f(x)\,dx$ интеграл астындағы өрнек, x интегралдау айнымалысы.

C еркін тұрақтысы барлық алғашқы функцияларды қамтиды.

Интеграл мен дифференциалдың байланысы

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \qquad \int dF = F + C$$

Интегралдау туынды алуды тұрақтыға дейін кері қайтарады. Ал табылған алғашқы функцияны дифференциалдасақ:

$$d\big(F(x) + C\big) = f(x)\,dx$$

dx белгісін интегралдан бөлек қалдырмаймыз: ол айнымалыны көрсетеді.

Анықталмаған интегралдың сызықтылығы

$F' = f$, $G' = g$, ал a және b тұрақты сандар болсын. Туындының сызықтылығынан:

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = aF(x) + bG(x) + C$$

Шынында, $(aF + bG + C)' = af + bg$. Тұрақтыны соңында бір C түрінде жазу жеткілікті.

Бұл қасиет қосындыға және тұрақты көбейткішке арналған.

Дәрежелік функцияның интегралы

α нақты сан, α≠−1 болсын. Жалпы нақты дәреже үшін x>0 аралығында:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Тексеру: $\left(x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\right)' = x^{\alpha}$.

Бүтін дәрежелерде және кейбір рационал дәрежелерде формула тиісті кеңірек аралықтарда да қолданылады.

Ерекше дәреже: α=−1

α=−1 кезінде дәрежелік формуланың бөлімі нөлге айналады. Бұл жағдайда логарифм қолданылады:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$$

x>0 үшін ln|x|=ln x. x<0 үшін ln|x|=ln(−x), оның туындысы да 1/x-ке тең.

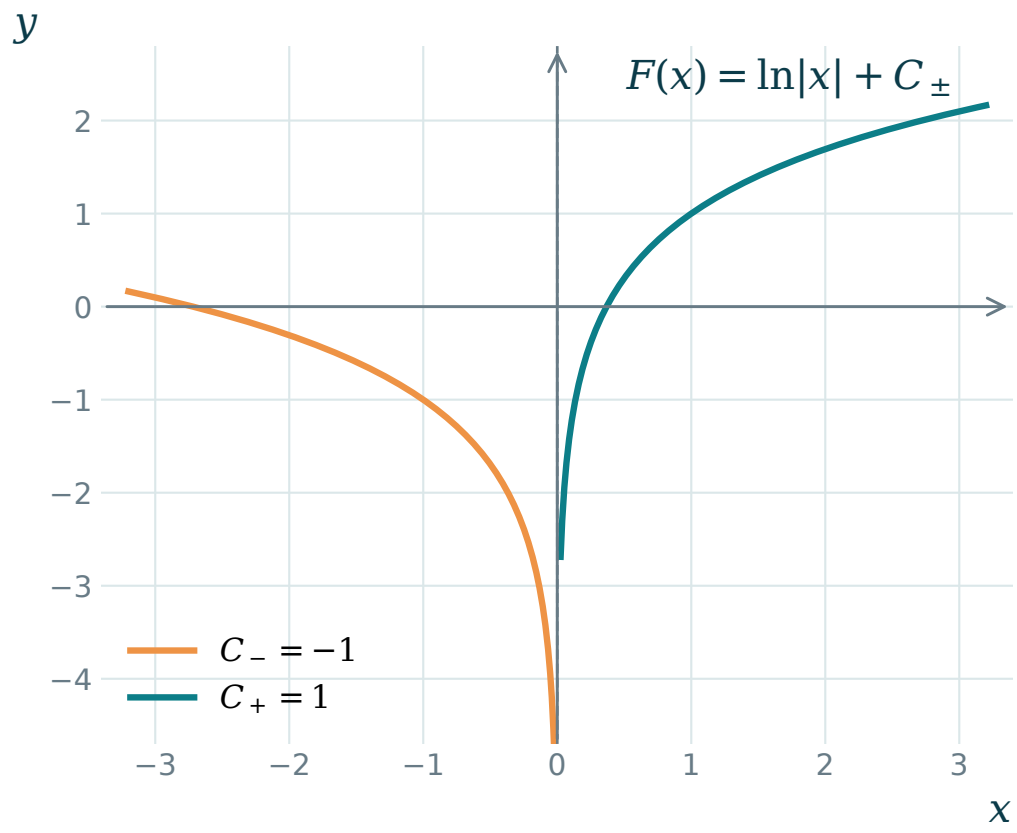
Формула нөлді қамтымайтын әр аралықта қарастырылады.

Бөлек аралықтардағы тұрақтылар

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_-, & x < 0, \\ \ln|x| + C_+, & x > 0. \end{cases}$$

Нөл облысқа кірмейді. Теріс және оң жарты осьтердегі тұрақтылар бір-біріне тәуелсіз таңдалады.

Бір тұрақты туралы теорема бір аралықта ғана қолданылады.



Экспоненталық функциялар кестесі

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0, \quad a \neq 1$$

a=1 болса, интеграл астындағы функция 1-ге тең, сондықтан алғашқы функция x+C болады.

Жалпы негізді экспонентада ln a көбейткішін ұмытпаймыз.

Синус пен косинустың интегралдары

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Бірінші формулада минус таңбасы бар, себебі $(-\cos x)' = \sin x$. Екі формула барлық нақты x үшін дұрыс.

Тангенс пен котангенс арқылы интегралдау

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

Бірінші формулада cos x≠0, екіншісінде sin x≠0 болуы керек. Әр формула бөлім нөлге айналмайтын аралықта қолданылады.

Кері тригонометриялық интегралдар

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad |x| < 1$$

Бірінші формула бүкіл нақты осьте, екіншісі (−1,1) аралығында қолданылады.

Параметрі бар екі кестелік формула

a>0 болсын. Күрделі функцияның туындысы арқылы тексереміз:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \qquad |x| < a$$

Коэффициенттерді тексергенде ішкі аргумент x/a-ның туындысын ескереміз.

Тікелей интегралдау алгоритмі

1. Облыс — Интеграл астындағы функцияның анықталу аралығын көрсетеміз.
2. Түрлендіру — Жақшаларды ашып, дәрежелерді ықшамдап немесе бөліндіні жеке мүшелерге жіктейміз.
3. Кесте — Сызықтылық пен тиісті кестелік формулаларды қолданамыз.
4. Тексеру — Бір еркін тұрақты қосып, нәтижеден туынды аламыз.

Көпмүшені тікелей интегралдау

$$\int (4x^3 - 6x + 5)\,dx$$

Әр мүшеге дәрежелік формуланы қолданамыз. Тұрақтының алғашқы функциясы сызықтық болады:

$$x^4 - 3x^2 + 5x + C$$

Тексеру: туындысы $4x^3 - 6x + 5$-ке тең.

Түбірлерді дәрежелерге айналдыру

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (x^{1/2} + x^{-1/2})\, dx$$

Бастапқы өрнек x>0 кезінде анықталған. Екі дәреже де −1-ден өзгеше:

$$\frac{2}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + C, \qquad x > 0$$

Алғашқы функцияны жазғанда бастапқы өрнектің облысын сақтаймыз.

Бөлшекті ықшамдаудан бастау

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2}\,dx = \int \left(x + 2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Бұл есепте бөлім бойынша күрделі жіктеу қажет емес. Әр мүшені x^2-қа бөлеміз:

$$\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{x} + C, \qquad x \neq 0$$

Соңғы мүшедегі плюс таңбасы $(1/x)' = -1/x^2$ теңдігінен шығады.

Сызықтық аргументі бар функция

$F'(u) = f(u)$, a≠0 болсын. Күрделі функцияның туындысынан:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Тексеру: $((1/a)F(ax+b))' = (1/a)f(ax+b)\,a = f(ax+b)$.

Алмастыру әдісінің осы қарапайым түрі келесі дәрісте жалпыланады.

Сызықтық аргументке мысалдар

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$$

Соңғы формула x=2/3 нүктесін қамтымайтын аралықтарда қолданылады.

Тригонометриялық тепе-теңдікті қолдану

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Квадратты негізгі кестеге тікелей қоюға болмайды. Тепе-теңдіктен кейін қосындыны интегралдаймыз:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

1/4 коэффициенті сыртқы 1/2-ден және 2x ішкі аргументінен шығады.

Логарифмдегі модульді тексеру

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x-2|, \qquad x \neq \frac{2}{3}$$

$$F'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3x-2} = \frac{1}{3x-2}$$

ln(3x−2) тек x>2/3 үшін нақты мәнді. Модуль формуланы теріс аргументке сәйкес сол жақ аралықта да қолдануға мүмкіндік береді.

Жауапты туынды арқылы тексеру

$\int \cos(3x)\,dx$ үшін H(x)=sin(3x) жауабы ұсынылсын. Оның туындысын аламыз:

$$H'(x) = 3\cos(3x) \neq \cos(3x)$$

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

Туынды алу коэффициент пен таңба қателерін бірден анықтайды.

Көбейтіндіге арналған қате жорамал

Интегралдың сызықтылығы көбейтіндіге таралмайды. Мысалы, f(x)=g(x)=x үшін $x^2/2$ алғашқы функцияларын көбейтсек:

$$H(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}, \qquad H'(x) = x^3 \neq x^2$$

Демек, алғашқы функциялардың көбейтіндісі fg үшін автоматты түрде алғашқы функция болмайды.

Көбейтінділердің кейбірі келесі дәрістегі бөліктеп интегралдау әдісімен есептеледі.

Алғашқы функцияның бар болуы және формула

Үзіліссіз функцияның аралықта алғашқы функциясы бар. Бұл тұжырымның негіздемесі анықталған интеграл арқылы 14-дәрісте беріледі.

Бірақ алғашқы функция әрдайым элементар функциялардың шекті комбинациясымен жазыла бермейді.

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

Бұл интегралдың алғашқы функциясы бар, алайда элементар формуласы жоқ.

Жылдамдықтан координатаны табу

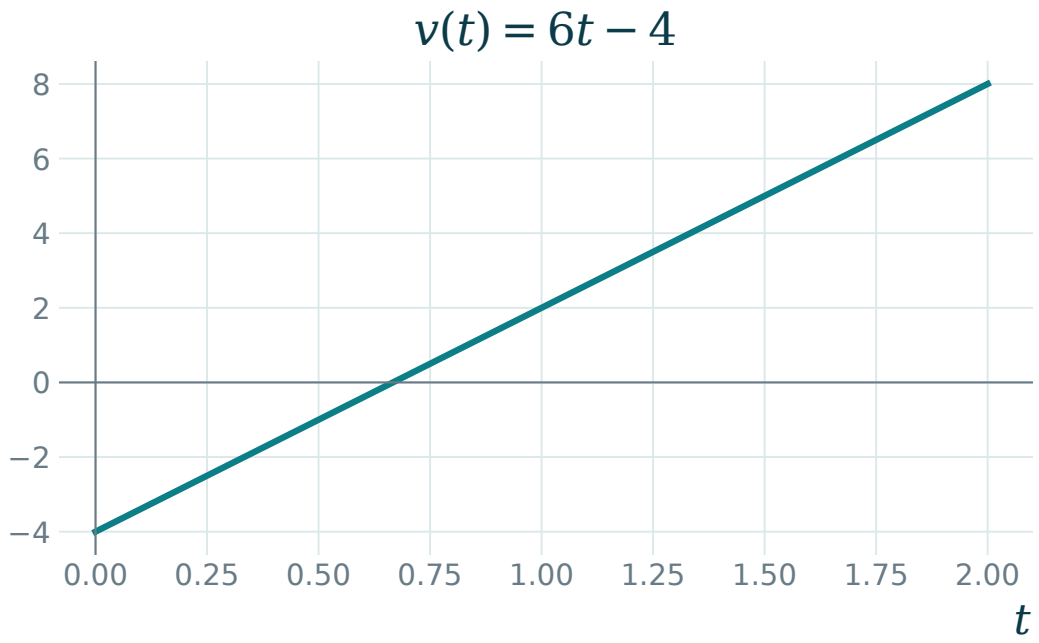
Бірөлшемді қозғалыста жылдамдық v(t)=6t−4 м/с және s(0)=2 м берілсін. Координата үшін s′(t)=v(t).

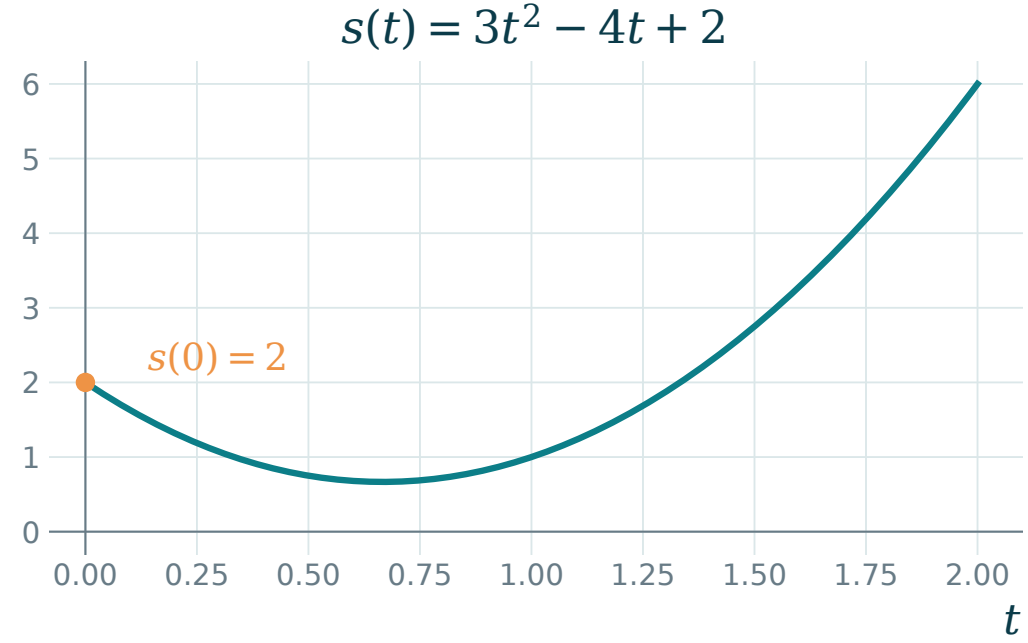
$$s(t) = 3t^2 - 4t + C, \qquad C = s(0) = 2$$

Сондықтан s(t)=3t²−4t+2 м. Жылдамдықтың өзі бастапқы координатаны анықтамайды; бір қосымша мән керек.

Координата мен жүрілген жол бір ұғым емес: жылдамдық теріс болуы мүмкін.

Қозғалыс мысалының графиктері





t<2/3 кезінде координата кемиді, t>2/3 кезінде өседі. Координата графигінің туындысы жылдамдықты береді.

Анықталмаған және анықталған интеграл

Анықталмаған $\int f(x)\,dx$ алғашқы функциялар жиынын білдіреді. Жауапта айнымалы және C тұрақтысы бар.

Анықталған $\int_a^b f(x)\,dx$ белгісінде екі шек жазылады. Оның мағынасы мен есептелуі 14-дәрісте қарастырылады.

Осы дәрістің міндеті Туындысы берілген функцияға тең болатын функцияны табу және оны тексеру.

Жиі кездесетін қателер

Еркін тұрақты	Жалпы алғашқы функцияны жазғанда +C қосылады; бір нүктедегі шарт берілсе, C табылады.
Дәрежелік формула	$\alpha=-1$ жағдайында дәрежені бірге арттыру формуласы қолданылмайды.
Ішкі коэффициент	$f(ax+b)$ интегралында $1/a$ коэффициенті қажет.
Облыс пен модуль	Логарифмдегі модуль және түбір мен бөлшектің анықталу аралығы тексеріледі.

Өзіндік жұмыс

1. $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$ интегралын табыңыз.

2. $\int (2/\sqrt{x} - 3/x)\,dx$, x>0 интегралын табыңыз.

3. $\int (2e^{2x} + \sin(3x))\,dx$ интегралын табыңыз.

4. $\int dx/(9 + x^2)$ интегралын табыңыз.

5. $F'(x) = 2x + 5$, F(0)=−1 болса, F функциясын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $2x^3 - 2x^2 + 3x + C$.

2. $4\sqrt{x} - 3\ln x + C$, x>0.

3. $e^{2x} - (1/3)\cos(3x) + C$.

4. $(1/3)\arctan(x/3) + C$.

5. $F(x) = x^2 + 5x - 1$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Алғашқы функцияның анықтамасы қандай?
2. Неліктен бір аралықтағы екі алғашқы функция тұрақтыға ғана ерекшеленеді?
3. Еркін тұрақтыны бір нүктедегі мән арқылы қалай табамыз?
4. Дәрежелік формуладағы $\alpha=-1$ жағдайы неге бөлек қарастырылады?
5. $\ln|x|$ формуласы қандай аралықтарда қолданылады?
6. Табылған интегралдың дұрыстығын қалай тексереміз?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.