Математикалық талдау 1

8-дәріс

Монотондық және экстремумдар

Туындының таңбасы және функцияның өзгеруі
Ең үлкен және ең кіші мәндер. Оңтайландыру

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: туынды арқылы өсу мен кему аралықтарын, жергілікті экстремумдарды және ең үлкен, ең кіші мәндерді табу.

Функцияның өзгеруі

Монотондық және туынды таңбасы.
Стационар және сындық нүктелер.
Экстремумның жеткілікті шарттары.

Оңтайландыру есептері

Кесіндідегі ең үлкен, ең кіші мән.
Ашық және шенелмеген аралықтар.
Геометриялық қолданылулар.

Есептеу реті: анықталу облысы, туынды, сындық нүктелер, таңба кестесі, қорытынды.

Өсу және кему анықтамалары

I аралығындағы кез келген $x_1 < x_2$ үшін функция мәндерін салыстырамыз.

кемімейтін: $f(x_1) \le f(x_2)$,

қатаң өсетін: $f(x_1) < f(x_2)$,

өспейтін: $f(x_1) \ge f(x_2)$,

қатаң кемитін: $f(x_1) > f(x_2)$.

Қатаң және қатаң емес монотондықты ажыратамыз; тұрақты функция кемімейді де, өспейді де.

Монотондықтың қажетті шарты

f функциясы I аралығында кемімейтін және ішкі x нүктесінде дифференциалданатын болсын.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad (h \neq 0), \qquad f'(x) \geq 0$$

h>0 болса, алым теріс емес. h<0 болса, алым оң емес және бөлім теріс. Екі жағдайда да қатынас теріс емес; шекке өтеміз.

Өспейтін дифференциалданатын функция үшін $f'(x) \leq 0$.

Монотондықтың жеткілікті шарты

f функциясы I аралығында дифференциалдансын. Егер I-де $f'(x) \geq 0$ болса, функция кемімейді.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0, \qquad x_1 < c < x_2$$

Кез келген екі нүктенің арасындағы кесіндіге Лагранж теоремасын қолдандық.

$f' \leq 0$ болса, функция өспейді. Аралық шеттері кірсе, олардағы үзіліссіздік те тексеріледі.

Қатаң монотондық және нөлдік туынды

I аралығында $f'(x) > 0$ болса, функция қатаң өседі; $f'(x) < 0$ болса, қатаң кемиді.

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2 \geq 0, \qquad f'(0) = 0$$

Кубтық функция нақты осьте қатаң өседі. Демек, қатаң өсу үшін туындының әр нүктеде қатаң оң болуы қажетті шарт емес.

Туындының бір нүктеде нөлге тең болуы қатаң монотондықты бұзбайды.

Аралық шартының маңызы

$$f(x)=\frac{1}{x}, \qquad D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty), \qquad f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

Функция $(-\infty,0)$ және $(0,+\infty)$ аралықтарының әрқайсысында қатаң кемиді.

Бірақ бүкіл анықталу облысында кемиді деуге болмайды: $-1<1$, ал $f(-1)=-1<f(1)=1$.

Туындының таңбасына арналған теорема аралықта қолданылады. Үзіліс арқылы секіріп өтуге болмайды.

Монотондықты зерттеу алгоритмі

1. Анықталу облысы	Облысты аралықтарға бөліп, оған кірмейтін нүктелерді белгілейміз.
2. Туынды	Туындыны есептеп, нөл болатын және жоқ болатын ішкі нүктелерді табамыз.
3. Таңба кестесі	Бөлінген әр аралықта туындының таңбасын анықтаймыз.
4. Қорытынды	Оң таңбаға өсу, теріс таңбаға кему сәйкес келеді. Шеткі нүктелерді үзіліссіздікке қарай қосамыз.

Кубтық функция үшін таңба кестесі

$$f(x) = x^3 - 3x, \qquad f'(x) = 3(x-1)(x+1)$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

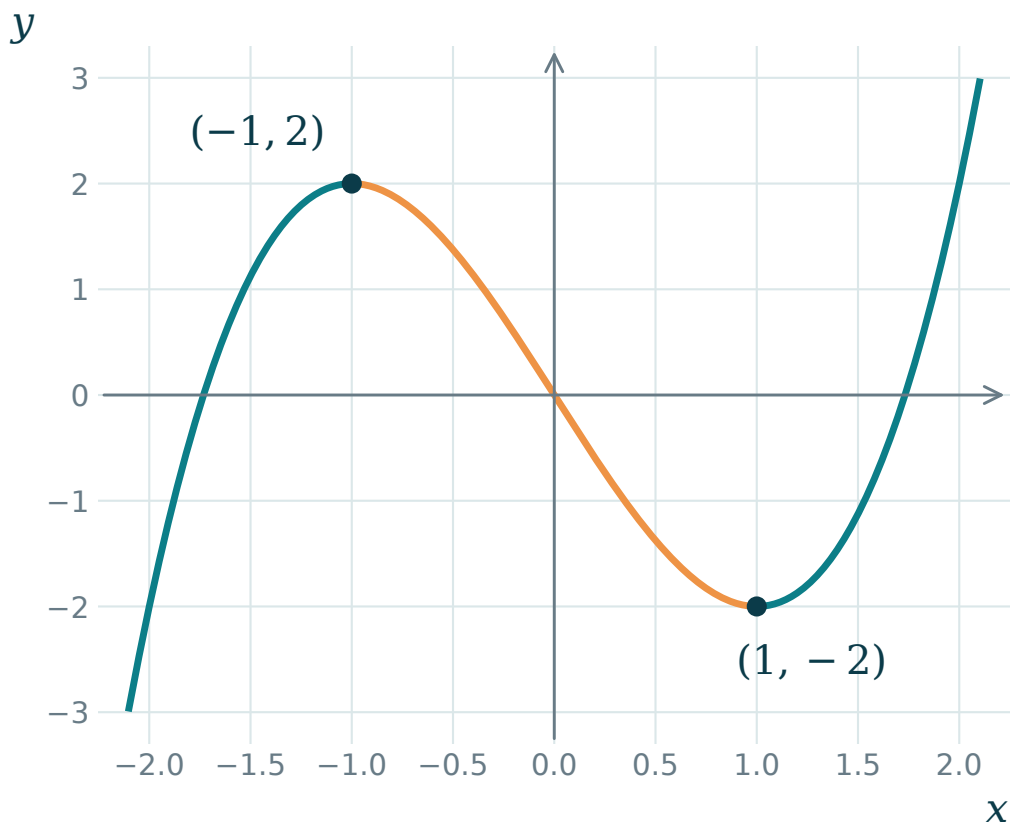
Функция $(-\infty,-1]$ және $[1,+\infty)$ аралықтарында өседі, $[-1,1]$-де кемиді. Шеткі нүктелер үзіліссіздік арқылы қосылды.

Таңба кестесінен графикке өту

$$f(x) = x^3 - 3x$$

x=−1 нүктесінің сол жағында функция өседі, оң жағында кемиді. Бұл жерде жергілікті максимум бар.

x=1 нүктесінің сол жағында кемиді, оң жағында өседі. Бұл жерде жергілікті минимум бар.



Бірнеше стационар нүкте болғанда

$$f(x) = x^4 - 4x^2, \qquad f'(x) = 4x(x^2 - 2)$$

x	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Стационар нүктелердің барлығы ретімен жазылады. Туындының таңбасы көршілес аралықтарда жеке тексеріледі.

Жергілікті экстремумның анықтамасы

c анықталу облысының ішкі нүктесі болсын. Оның жеткілікті кіші маңайындағы барлық x үшін:

$$\text{жергілікті максимум: } f(x) \leq f(c),$$

$$\text{жергілікті минимум: } f(x) \geq f(c).$$

Максимум және минимум бірге экстремум деп аталады. Тек жақын нүктелермен салыстыру жеткілікті.

c нүктесі мен f(c) экстремум мәнін бір-бірінен ажыратамыз.

Жергілікті, қатаң және абсолют экстремум

Жергілікті	Теңсіздік с нүктесінің бір маңайында ғана орындалуы жеткілікті.
Қатаң жергілікті	Маңайдағы x≠c үшін теңсіздік қатаң болады.
Абсолют	Функция мәні бүкіл қарастырылатын жиындағы мәндермен салыстырылады.
Тұрақты функция	Әр ішкі нүктеде қатаң емес максимум да, минимум да бар. Қатаң экстремум жоқ.

Стационар және сындық нүктелер

Стационар нүкте	Туынды бар және $f'(c) = 0$.
Сындық нүкте	Осы дәрісте: облыстың ішкі нүктесі, мұнда туынды нөлге тең немесе ақырлы туынды жоқ.
Облысқа кіруі	c нүктесінде функция анықталуы керек. Бөлімді нөлге айналдыратын тыйым салынған нүкте экстремум болмайды.
Шеткі нүктелер	Кесіндідегі ең үлкен, ең кіші мәндерді іздегенде олар жеке тексеріледі.

Экстремумның қажетті шарты

f функциясы ішкі c нүктесінде жергілікті экстремумға ие болып, сол нүктеде дифференциалдансын.

$$f'(c) = 0$$

Бұл Ферма теоремасының қорытындысы. Сондықтан дифференциалданатын ішкі экстремумдарды $f'(x) = 0$ теңдеуінен іздейміз.

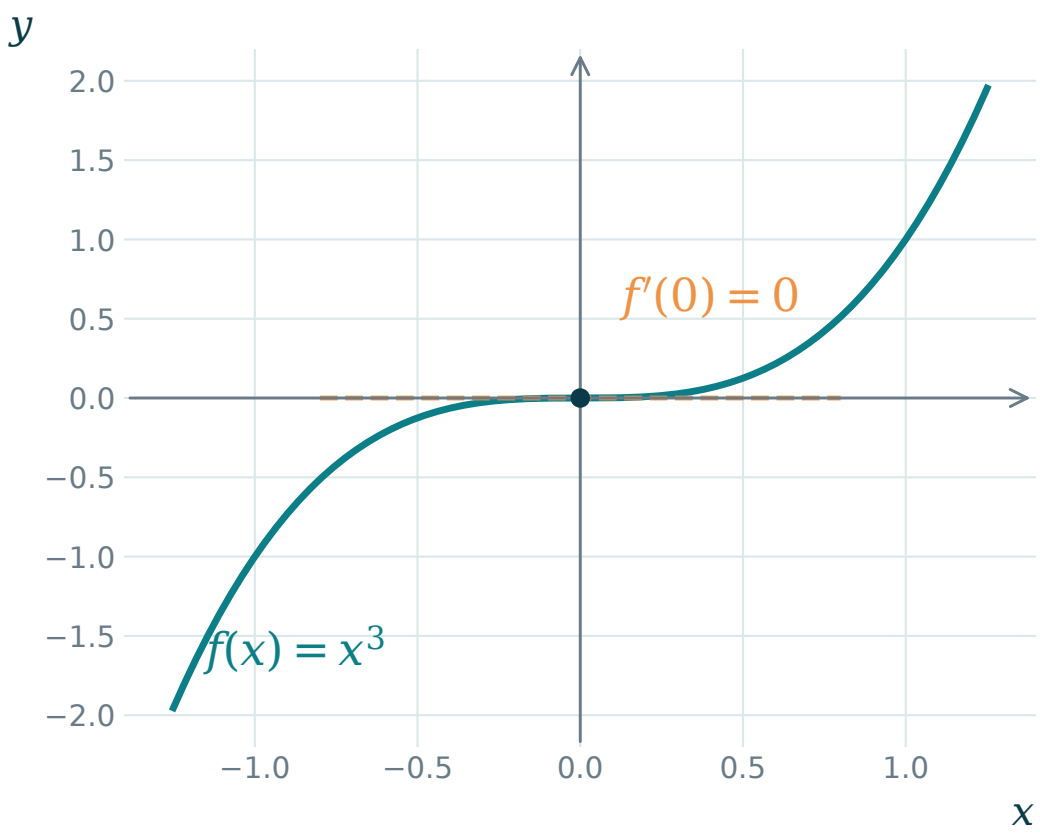
Теңдеудің түбірлері тек кандидаттар. Олардың әрқайсысы қосымша тексеріледі.

Стационар нүкте экстремум болмауы мүмкін

$$f(x) = x^3, \qquad f'(0) = 0$$

Нөлдің сол жағында f(x)<0, ал оң жағында f(x)>0. f(0)=0 жақын мәндердің бәрінен үлкен де, кіші де емес.

Көлденең жанаманың болуы өздігінен максимумды не минимумды білдірмейді.

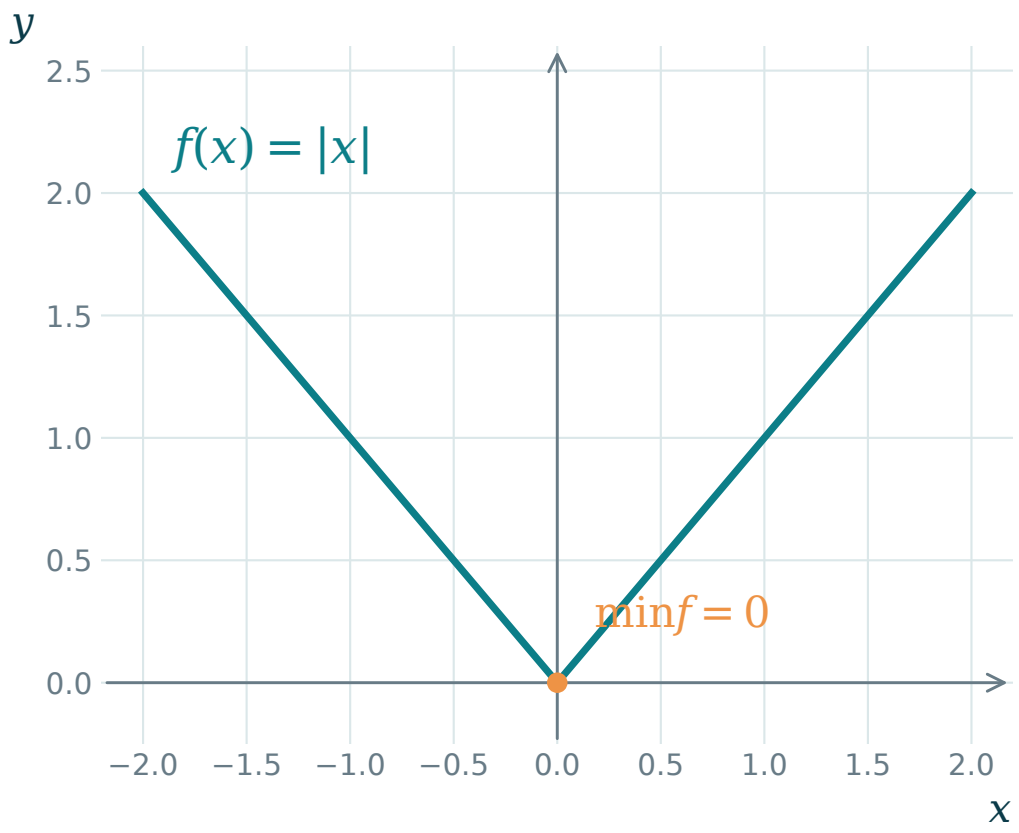


Туынды жоқ нүктедегі минимум

$$f(x) = |x|, \qquad f(0) = 0$$

Барлық x үшін |x|≥0. Сондықтан нөлде қатаң жергілікті және абсолют минимум бар.

$f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Ақырлы екіжақты туынды жоқ.



Бірінші туынды бойынша экстремум белгісі

Ортақ шарт	f функциясы c-де үзіліссіз, ал c-нің екі жағындағы кіші аралықтарда дифференциалданатын болсын.
+ таңбасынан − таңбасына	Функция алдымен өсіп, кейін кемиді. c нүктесінде қатаң жергілікті максимум бар.
− таңбасынан + таңбасына	Функция алдымен кеміп, кейін өседі. c нүктесінде қатаң жергілікті минимум бар.
Таңба өзгермейді	Туынды екі жақта да қатаң оң немесе екі жақта да қатаң теріс болса, экстремум жоқ.

Бірінші туынды белгісінің дәлел идеясы

$f' > 0$ сол жақта, $f' < 0$ оң жақта болсын. x<c үшін [x,c]-ке, x>c үшін [c,x]-ке Лагранж теоремасын қолданамыз.

$$x < c: \quad f(c) - f(x) > 0, \qquad x > c: \quad f(x) - f(c) < 0$$

Екі жақтағы жақын нүктелерде де f(x)<f(c). Демек, c қатаң жергілікті максимум нүктесі.

Минимум үшін туынды таңбаларының бағыты керісінше болады.

Туынды таңбасы өзгермейтін жағдай

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Функция нөлден өткенде де өсуін жалғастырады. Туындының нөлге тең болуының өзі экстремум үшін жеткіліксіз.

Кубтық функцияның экстремумдары

$$f(x) = x^3 - 3x, \qquad f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

x=−1 нүктесі

Туынды + таңбасынан − таңбасына өтеді.
Жергілікті максимум: f(−1)=2.

x=1 нүктесі

Туынды − таңбасынан + таңбасына өтеді.
Жергілікті минимум: f(1)=−2.

Бүкіл нақты осьте функция жоғарыдан да, төменнен де шенелмеген. Абсолют максимум мен минимум жоқ.

Екінші туынды бойынша экстремум белгісі

f' с маңайында анықталсын; $f'(c) = 0$ және $f''(c)$ бар болсын.

$$f''(c) > 0 \Longrightarrow \text{ қатаң жергілікті минимум,}$$

$$f''(c) < 0 \Longrightarrow \text{ қатаң жергілікті максимум.}$$

Екінші туынды нөлден өзге болса, бірінші туындының таңба ауысуын әр аралықта бөлек есептемей-ақ анықтауға болады.

Екінші туынды белгісінің негіздемесі

$f'(c) = 0$ болғандықтан, екінші туындының анықтамасынан:

$$\frac{f'(c+h)}{h} \to f''(c)$$

$f''(c) > 0$ болса, жеткілікті кіші h үшін қатынас оң. h<0 кезінде $f'(c+h) < 0$, h>0 кезінде $f'(c+h) > 0$.

Туынды − таңбасынан + таңбасына ауысады, демек минимум бар. Теріс екінші туынды үшін максимум шығады.

Екінші туынды нөлге тең болса

Минимум болуы мүмкін

$f(x) = x^4$: $f'(0) = f''(0) = 0$, бірақ нөлде қатаң минимум бар.

Максимум болуы мүмкін

$f(x) = -x^4$: сол туындылар нөлге тең, ал нөлде қатаң максимум бар.

Экстремум болмауы мүмкін

$f(x) = x^3$: $f'(0) = f''(0) = 0$, алайда нөлде экстремум жоқ.

Кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мән

Бар болуы	f функциясы [a,b]-де үзіліссіз болса, Вейерштрасс теоремасы екі мәннің де бар болуын береді.
Ішкі кандидаттар	Туынды нөлге тең немесе ақырлы туынды жоқ болатын ішкі нүктелерді табамыз.
Шеткі кандидаттар	f(a) және f(b) мәндерін міндетті түрде есептейміз.
Салыстыру	Барлық кандидаттағы функция мәндерін салыстырамыз. Кандидаттар жиыны кейде шексіз болуы мүмкін.

Кесіндідегі абсолют экстремумға мысал

$$f(x) = x^3 - 3x, \qquad x \in [-2, 2]$$

Ішкі стационар нүктелер: x=−1 және x=1. Оларды екі шеткі нүктемен бірге тексереміз:

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-2	2	-2	2

Ең кіші мәні −2: x=−2 және x=1. Ең үлкен мәні 2: x=−1 және x=2.

Туынды жоқ нүктені де тексеру керек

$$f(x) = |x - 1|, \qquad x \in [-1, 3]$$

Туынды x=1-де жоқ. Қалған ішкі нүктелерде туынды ±1, сондықтан нөл болатын нүктелер жоқ.

$$f(-1) = 2, \qquad f(1) = 0, \qquad f(3) = 2$$

Ең кіші мәні 0, ең үлкен мәні 2. Тек f′(x)=0 теңдеуін шешсек, минимумды өткізіп алар едік.

Ашық аралықтағы шеткі мәндер

$$f(x) = x, \qquad x \in (0, 1)$$

Функция үзіліссіз әрі қатаң өседі. Бірақ ең кіші мән де, ең үлкен мән де қабылданбайды.

$$\inf f = 0, \qquad \sup f = 1$$

Инфимум мен супремум функция қабылдайтын минимум мен максимумға әрдайым тең емес.

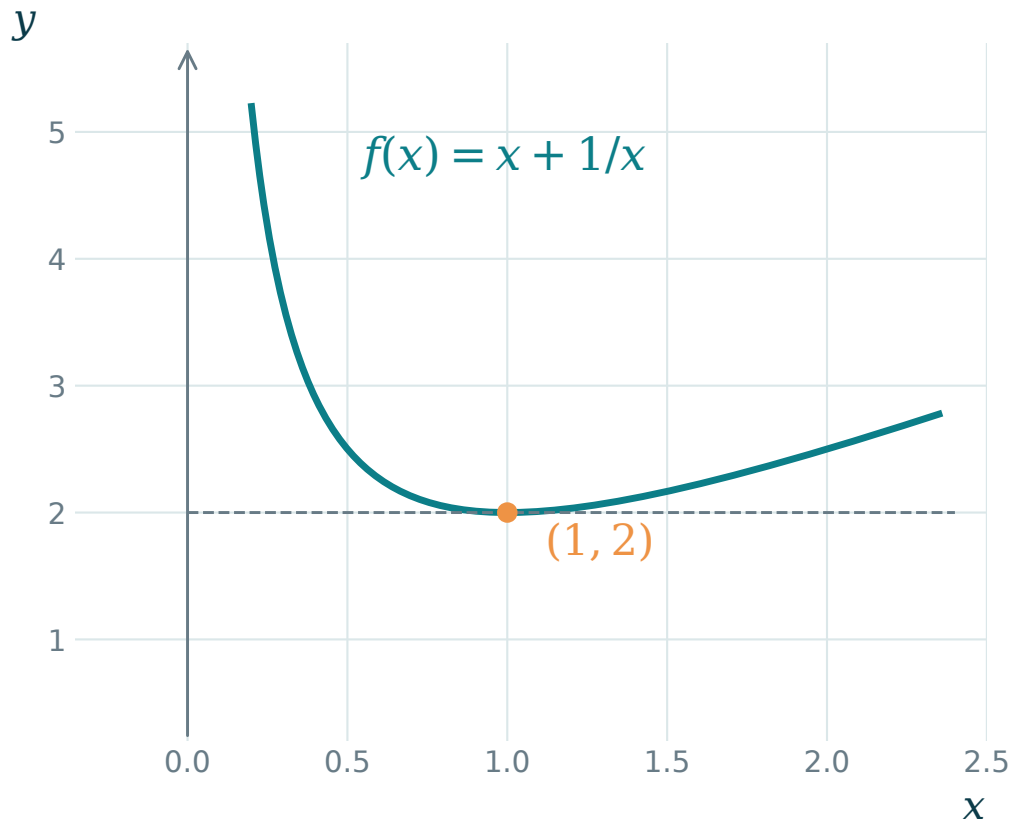
Оң жарты осьтегі минимум

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

$f'(x) = 1 - 1/x^2$. (0,1)-де теріс, (1,+∞)-де оң.

Функция алдымен кеміп, кейін өседі. Бүкіл облыстағы ең кіші мәні f(1)=2 болады.

Екі шетке жақындағанда да f → +∞; ең үлкен мән жоқ.



Қолданбалы есеп: ең үлкен аудан

Периметрі 20 м болатын тіктөртбұрыштың ең үлкен ауданын табайық. Қабырғалары x және 10−x метр, 0<x<10.

$$S(x) = x(10 - x), \qquad S'(x) = 10 - 2x$$

$$x = 5, \qquad S_{\max} = 25 \text{ м}^2$$

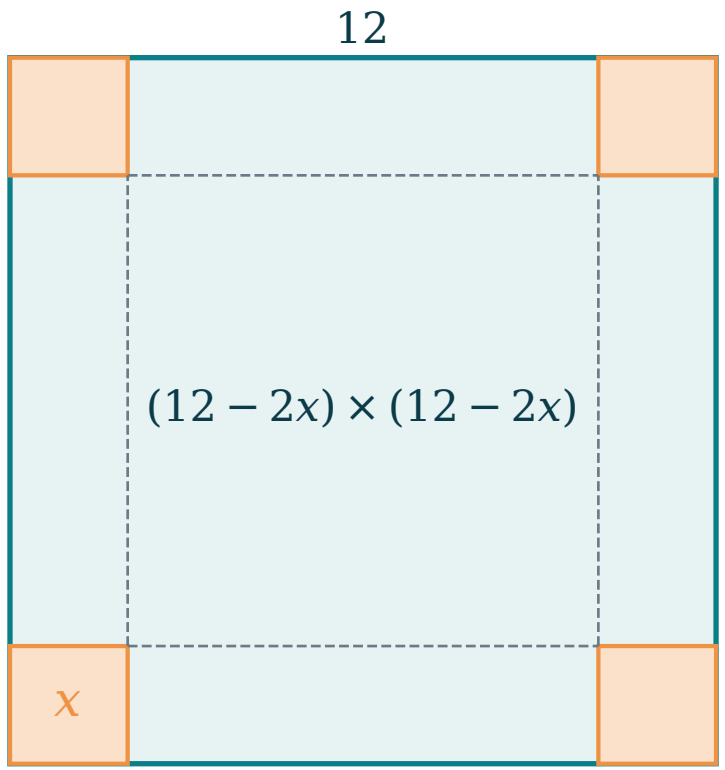
Туынды 5-ке дейін оң, одан кейін теріс. Ең үлкен аудан қабырғасы 5 м шаршыға сәйкес келеді.

Қорап көлемін оңтайландыру: модель

Қабырғасы 12 см шаршы қағаздың төрт бұрышынан қабырғасы x см шаршылар қиып алып, қақпақсыз қорап жасаймыз.

Қорап биіктігі x, табанының қабырғасы 12−2x. Мүмкін мәндер: 0<x<6.

$$V(x) = x(12 - 2x)^2$$



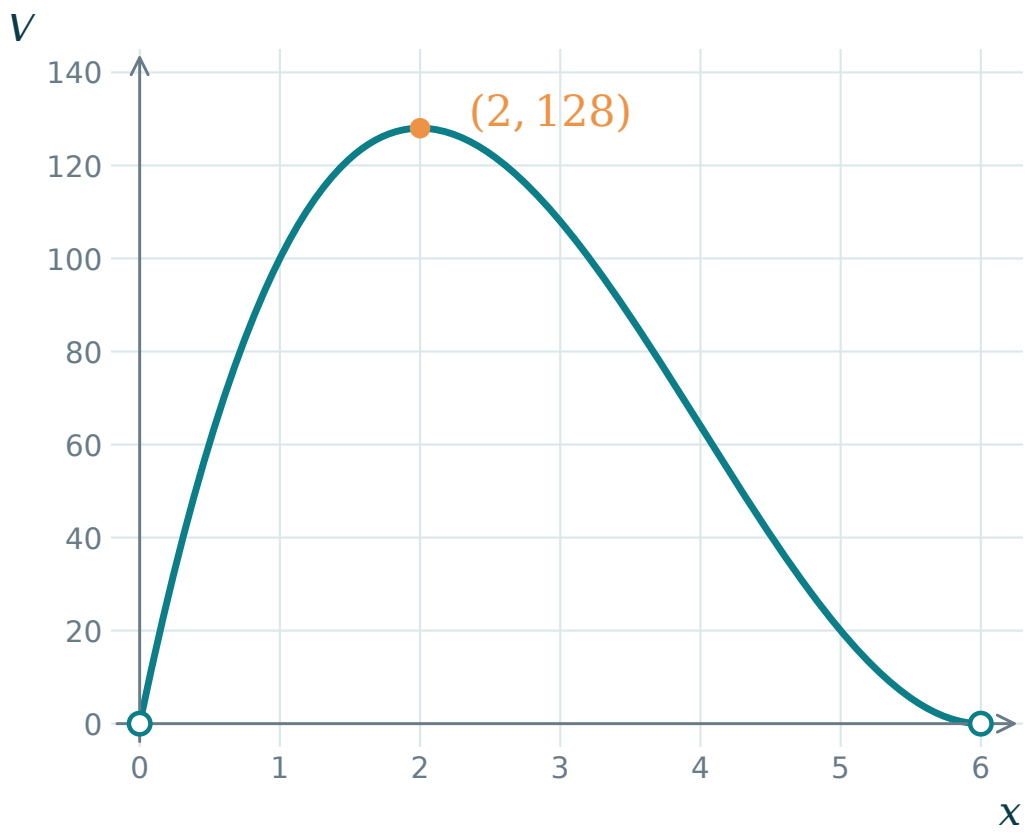
Қорап көлемін оңтайландыру: шешім

$$V'(x) = 12(6 - x)(2 - x)$$

0<x<6 аралығында 6−x>0. Туынды x=2-ге дейін оң, одан кейін теріс.

Көлемнің ең үлкен мәні x=2 см кезінде қабылданады. Табаны 8×8 см, биіктігі 2 см.

$$V_{\max} = 128 \text{ см}^3$$



Оңтайландыру есебінің толық шешімі

Модель құру	Айнымалыны, өлшем бірліктерін және мақсатты функцияны анықтаймыз.
Шектеулер	Есептің мағынасынан мүмкін мәндер облысын жазамыз. Геометриялық өлшемдер оң болуы керек.
Математикалық зерттеу	Сындық нүктелер мен шекарадағы мінезді зерттеп, абсолют экстремумды негіздейміз.
Жауапты түсіндіру	Нәтижені бастапқы есептің тілімен, өлшем бірліктерімен және тиісті өлшемдермен береміз.

Жиі кездесетін қателер

Тек теңдеуді шешу	$f'(c)=0$ теңдігінен бірден экстремум бар деп қорытынды жасауға болмайды.
Тыйым салынған нүкте	Функция анықталмаған нүкте экстремум болмайды. Ол тек аралықтарды бөлуі мүмкін.
Жергілікті және абсолют	Жергілікті максимум бүкіл облыстағы ең үлкен мән болмауы мүмкін.
Шеттерді ұмыту	Кесіндідегі абсолют экстремумдарды іздегенде шеткі нүктелер де салыстырылады.

Өзіндік жұмыс

1. $f(x) = x^4 - 4x^2$ функциясының жергілікті экстремумдарын табыңыз.

2. $f(x) = x^3 - 3x$ функциясының $[-1,3]$-тегі ең үлкен, ең кіші мәндерін табыңыз.

3. $f(x) = x^2 e^{-x}$ функциясының нақты осьтегі өсу және кему аралықтарын табыңыз.

4. $f(x) = |x + 2|$ функциясының $[-3,1]$-дегі ең үлкен, ең кіші мәндерін табыңыз.

5. Периметрі 24 см тіктөртбұрыштың ең үлкен ауданын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $x = \pm\sqrt{2}$: минимум мәні −4; x=0: жергілікті максимум мәні 0.

2. Ең кіші мәні −2, x=1-де; ең үлкен мәні 18, x=3-те.

3. $f' = e^{-x}x(2-x)$. Кему: (−∞,0] және [2,+∞); өсу: [0,2].

4. Ең кіші мәні 0, x=−2-де; ең үлкен мәні 3, x=1-де.

5. Қабырғалары 6 см және 6 см. Ең үлкен аудан 36 см^2.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Туындының таңбасы монотондықпен қалай байланысады?
2. Қатаң өсетін функцияның туындысы бір нүктеде нөл болуы мүмкін бе?
3. Стационар нүкте мен сындық нүктенің айырмашылығы қандай?
4. Бірінші және екінші туындылар бойынша экстремум белгілері қандай?
5. Кесіндідегі абсолют экстремум үшін қандай кандидаттар тексеріледі?
6. Оңтайландыру есебінде мүмкін мәндер облысын не үшін жазамыз?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.