Математикалық талдау 1

1-дәріс

Жиындар және сандық тізбектер

Логикалық белгілер және нақты сандар
Тізбектердің берілуі мен шенелуі

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

1-модуль. Жиындар, тізбектер және шектер

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: математикалық тұжырымдарды дәл оқу, жиындарға амалдар қолдану және сандық тізбектерді сипаттау.

Жиындар және логика

Жиындық амалдар мен аралықтар.
Абсолют шама және кванторлар.
Математикалық индукция.

Сандық тізбектер

Жалпы мүше және рекуррентті берілу.
Шенелген және шенелмеген тізбектер.
Ішкі тізбек ұғымы.

Бұл ұғымдар келесі дәрістегі шектің қатаң анықтамасына негіз болады.

Жиын және оның элементтері

Жиын белгілі бір объектілерді біртұтас қарастыру арқылы беріледі. Ол объектілер жиынның элементтері деп аталады.

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad 2 \in A, \qquad 5 \notin A$$

$x \in A$ белгісі x элементінің A жиынына тиістілігін білдіреді. $x \notin A$ оның A жиынына тиісті еместігін көрсетеді.

Жиын атауы мен оның жеке элементін ажыратамыз.

Жиынды беру тәсілдері

Элементтерін атау $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Барлық элементтері көрсетіледі.

Қасиеті арқылы $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10,\ x$ жұп$\}$. Элементтерді таңдайтын шарт беріледі.

Рет пен қайталау $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. Жиында элементтердің реті мен қайталануы ескерілмейді.

Бос жиын және бір элементті жиын

Элементтері жоқ жиын бос жиын деп аталады. Оның белгіленуі:

$$\emptyset = \{\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$$

$\{0\}$ жиынында бір элемент бар. $\{\emptyset\}$ жиынында да бір элемент бар: ол бос жиынның өзі.

$$\emptyset \neq \{0\}, \qquad \emptyset \neq \{\emptyset\}$$

Бос жиынның элементтер саны 0, ал бір элементті жиынның элементтер саны 1.

Ішкі жиын және жиындардың теңдігі

А жиынының әрбір элементі В жиынына тиісті болса, А жиыны В жиынының ішкі жиыны деп аталады.

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$A = B$ болуы $A \subseteq B$ және $B \subseteq A$ шарттарының бірге орындалуына мәндес.

Әрбір А үшін $\emptyset \subseteq A$ және $A \subseteq A$ орындалады.

Негізгі сан жиындары

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$	Натурал сандар: $1, 2, 3, \ldots$. Бұл курста нөмірлеуді 1-ден бастаймыз.
$\mathbb{Z}$	Бүтін сандар: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.
$\mathbb{Q}$	Рационал сандар: p/q, мұндағы $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{R}$	Нақты сандар. Иррационал сандар да кіреді, мысалы $\sqrt{2}$.

Нақты сандар аралықтары

Ашық аралық	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
Кесінді	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
Жартылай ашық	$[a, b)$ және $(a, b]$. Бір шеткі нүкте ғана кіреді.
Шексіз аралық	$(a, +\infty)$ немесе $(-\infty, b]$. Шексіздік нақты сан емес, оның жанында дөңгелек жақша қойылады.

Бірігу және қиылысу

Бірігуге кемінде бір жиынға тиісті элементтер, қиылысуға екі жиынға да тиісті элементтер кіреді.

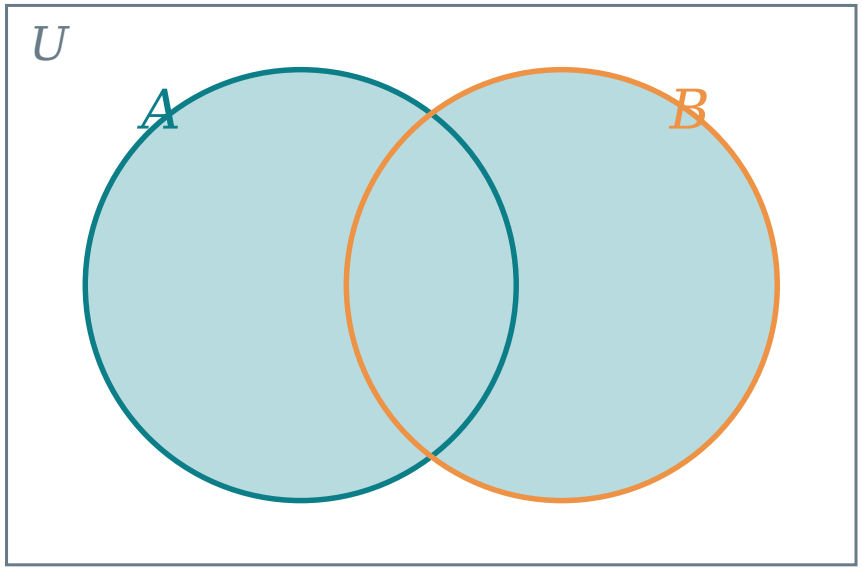
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ немесе } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ және } x \in B\}$$

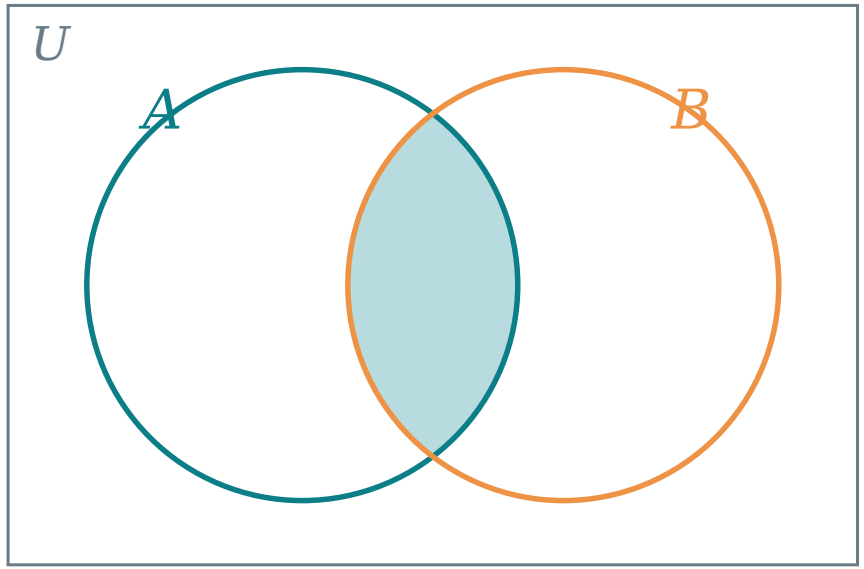
Мысалы, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ болса, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ және $A \cap B = \{3\}$.

Бірігу мен қиылысудың диаграммалары

$A \cup B$



$A \cap B$



Боялған аймақтар сәйкес амалды көрсетеді. U тіктөртбұрышы қарастырылатын әмбебап жиынды бейнелейді.

Айырма және толықтауыш

A мен B жиындарының айырмасы A-ға тиісті, B-ға тиісті емес элементтерден тұрады.

$$A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$$

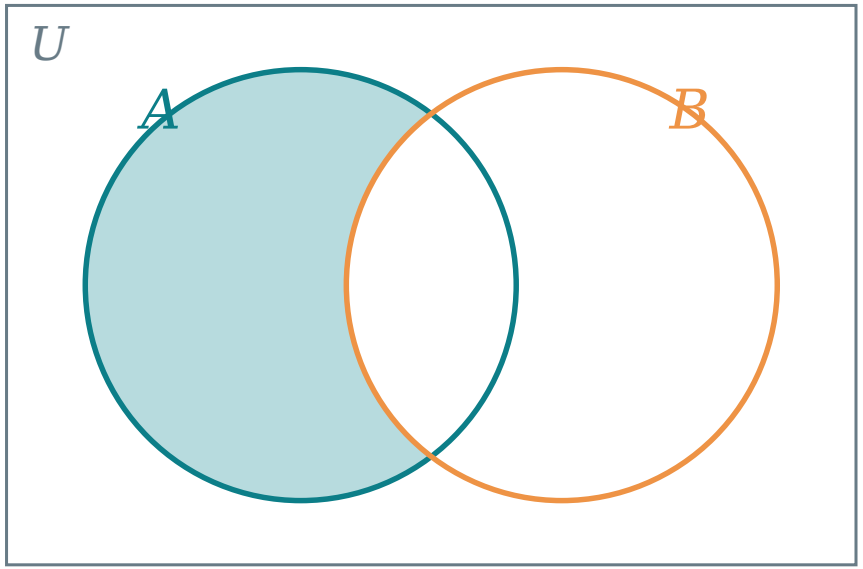
U әмбебап жиыны бекітілсе, A жиынының толықтауышы:

$$A^c = U \setminus A$$

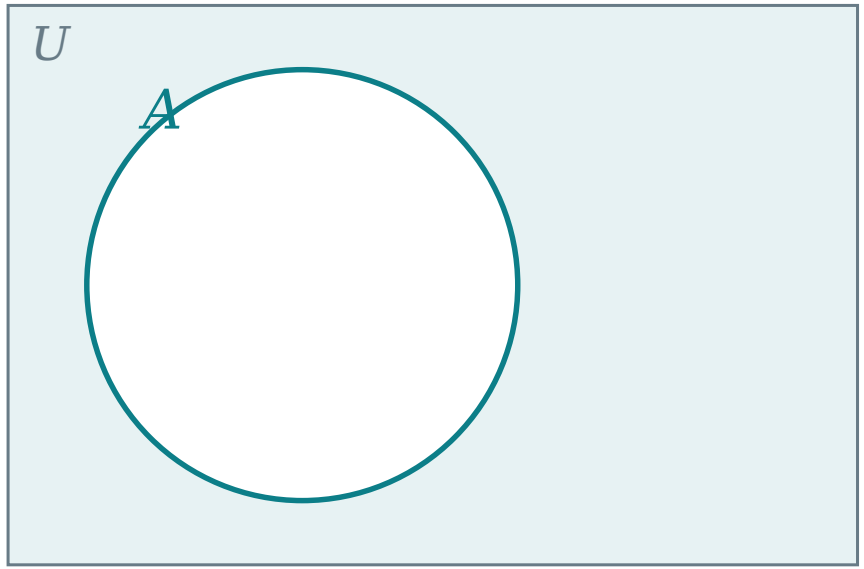
Әдетте $A \setminus B \neq B \setminus A$. Толықтауыш U жиынының таңдалуына тәуелді.

Айырма мен толықтауыштың диаграммалары

$A \setminus B$



$U \setminus A$



Сол жақта A-ның B-дан тыс бөлігі боялған. Оң жақта U ішіндегі A-ға кірмейтін нүктелер боялған.

Жиындық амалдардың негізгі заңдары

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Соңғы екі теңдік де Морган заңдары деп аталады. Оларды элементтің жиынға тиістілік шарттарын терістеу арқылы тексеруге болады.

Барлық толықтауыштар бір U әмбебап жиынына қатысты алынады.

Аралықтарға амалдар қолдану мысалы

$$A = (-1, 3], \qquad B = [1, 5)$$

$$A \cap B = [1, 3], \qquad A \cup B = (-1, 5)$$

$$A \setminus B = (-1, 1)$$

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$$

Шеткі нүктелердің тиістілігін әр теңсіздік үшін жеке тексереміз.

Абсолют шама

x нақты санының абсолют шамасы оның сан осіндегі 0 нүктесіне дейінгі арақашықтығын береді.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|-3| = 3$, $|0| = 0$, $|5| = 5$. Сонымен қатар $|x| \geq 0$ және $|x| = 0$ болуы $x = 0$ шартына мәндес.

$|xy| = |x|\,|y|$ және $|x| = |-x|$.

Арақашықтық және нүктенің маңайы

x пен a нүктелерінің арақашықтығы $|x-a|$ шамасына тең. $\varepsilon > 0$ болсын.

$$|x-a| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ аралығы a нүктесінің ε-маңайы деп аталады.

$$|x-2| < 0.5 \quad \Longleftrightarrow \quad 1.5 < x < 2.5$$

Маңай ұғымы тізбек пен функция шектерінің анықтамаларында қолданылады.

Абсолют шаманың негізгі теңсіздіктері

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Бұл үшбұрыш теңсіздігі деп аталады. Одан кері үшбұрыш теңсіздігі шығады:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

Мысалы, $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. Осыдан $|x| - |y| \leq |x - y|$. x пен y-тің орындарын ауыстырып, екінші бағаны аламыз.

Пікірлер және логикалық амалдар

Пікір	Ақиқат немесе жалған болатын тұжырым. Мысалы, $2 < 3$ ақиқат.
Терістеу	$\neg P$. P ақиқат болса, оның терістеуі жалған болады.
Және, немесе	$P \wedge Q$ үшін екеуі де ақиқат. $P \vee Q$ үшін кемінде біреуі ақиқат.
Салдар, мәндестік	$P \Rightarrow Q$ тек P ақиқат, Q жалған болғанда жалған болады. $P \Leftrightarrow Q$ екі бағыттағы салдарды білдіреді.

Кванторлар және олардың реті

$\forall$ жалпылық кванторы

«Барлық», «кез келген» деген мағынаны білдіреді.

$\exists$ бар болу кванторы

Кемінде бір сәйкес элементтің бар екенін білдіреді.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ y > x$$

Бұл тұжырым ақиқат: берілген x үшін y=x+1 деп алуға болады.

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ y > x$$

Бұл тұжырым жалған. Барлық нақты сандардан үлкен бір нақты сан жоқ.

Кванторлары бар тұжырымды терістеу

$$\neg(\forall x\ P(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x\ \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x\ P(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x\ \neg P(x)$$

«Барлық x үшін $f(x) > 0$» тұжырымының терістеуі: «Кемінде бір x үшін $f(x) \leq 0$».

Қатаң $>$ теңсіздігін терістегенде $\leq$ алынады. Кванторлың түрі де өзгереді.

Математикалық индукция әдісі

База	$P(1)$ тұжырымының ақиқаттығын тексереміз.
Индукциялық жорамал	Кез келген $k \geq 1$ үшін $P(k)$ ақиқат деп ұйғарамыз.
Индукциялық қадам	Осы жорамалдан $P(k+1)$ шығатынын дәлелдейміз.
Қорытынды	Сонда $P(n)$ барлық $n \in \mathbb{N}$ үшін ақиқат болады.

Индукцияға мысал

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

База: n=1 кезінде $1 = 1 \cdot 2/2$. Формула k үшін дұрыс болсын. Екі жағына k+1 қосамыз:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Оң жақ n=k+1 үшін қажетті өрнекке тең. Демек, формула барлық натурал n үшін орындалады.

Жиынның жоғарғы және төменгі шекаралары

A бос емес нақты сандар жиыны болсын. Егер m және M сандары үшін төмендегі шарт орындалса:

$$\forall x \in A: \quad m \leq x \leq M$$

M жоғарғы шекара, m төменгі шекара деп аталады. Екі шекарасы да бар жиын шенелген болады.

Мысалы, $A = (0, 1)$ үшін 0 төменгі, 1 жоғарғы шекара болады.

Нақты сандардың толықтығы

Бос емес, жоғарыдан шенелген нақты сандар жиынының ең кіші жоғарғы шекарасы бар. Ол супремум деп аталады.

$$s = \sup A$$

Төменнен шенелген бос емес жиынның ең үлкен төменгі шекарасы инфимум деп аталады.

$$\sup(0,1) = 1, \qquad \inf(0,1) = 0$$

Бұл аралықта ең үлкен және ең кіші элементтер жоқ.

Сандық тізбектің анықтамасы

Сандық тізбек әрбір натурал n санына бір нақты санды сәйкестендіреді.

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto x_n$$

x_n тізбектің n-ші мүшесі деп аталады. Тізбек (x_n) немесе $x_1, x_2, \ldots$ түрінде белгіленеді.

Тізбекте мүшелердің реті мен қайталануы маңызды.

Тізбекті беру тәсілдері

Жалпы мүше

$x_n = 1/n$. Кез келген мүшені оның нөмірі арқылы бірден табамыз.

Рекуррентті ереже

$x_1 = 1$, $x_{n+1} = (x_n + 2)/2$. Алғашқы мүше мен келесі мүшені табу ережесі беріледі.

Алғашқы мүшелер

$1, 1/2, 1/3, \ldots$ жазылуы заңдылық белгілі болса ғана толық мағына береді.

Сандық тізбектерге мысалдар

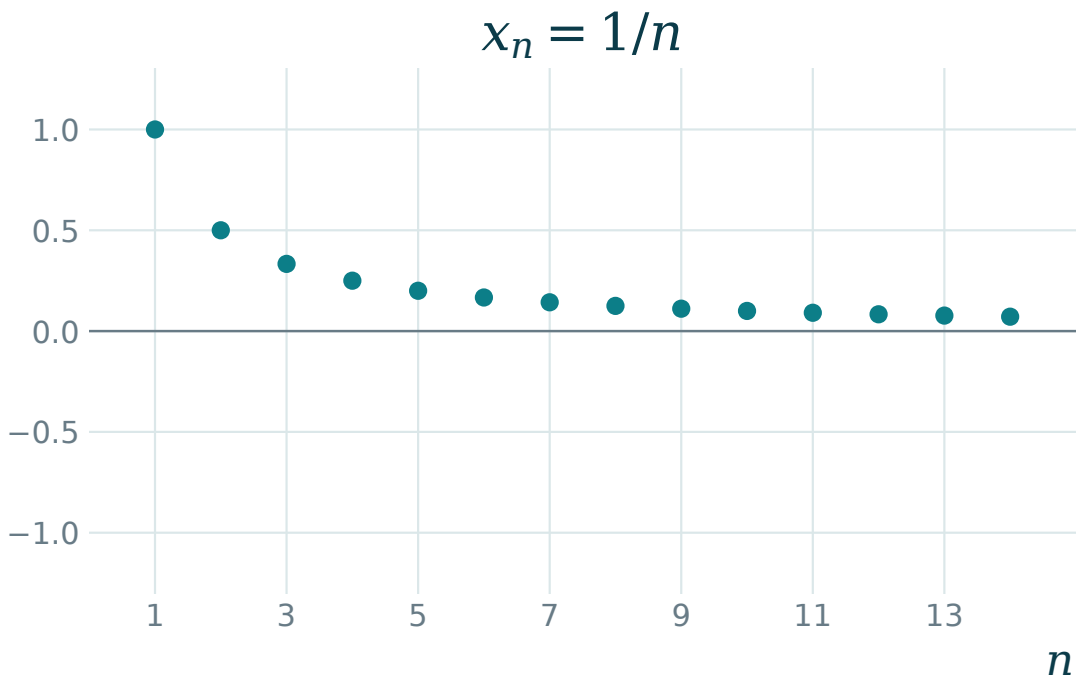
$x_n = 1/n$ $\quad 1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4, \ldots$

$y_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$

$z_n = 1 - 1/n$ $\quad 0,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/4, \ldots$

$u_n = n^2$ $\quad 1,\ 4,\ 9,\ 16, \ldots$

Тізбекті нүктелермен бейнелеу



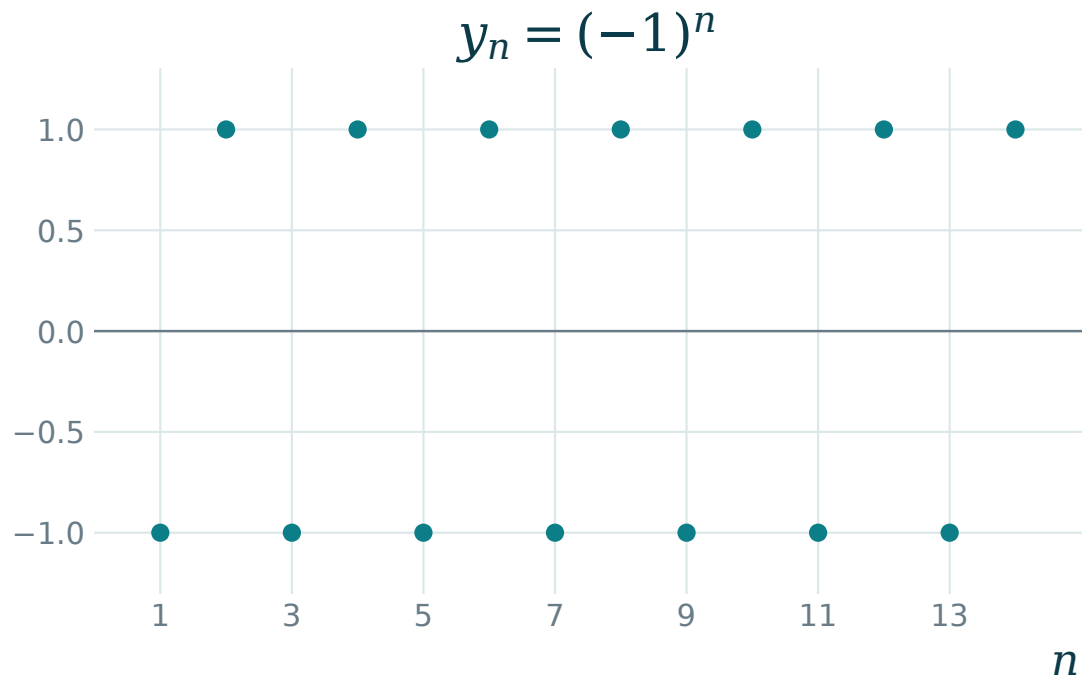


График (n, x_n) нүктелерінен тұрады. n тек натурал мәндер қабылдайды, аралықтағы нүктелер тізбекке кірмейді.

Шенелген сандық тізбек

Барлық мүшелерінің абсолют шамасы бір тұрақты саннан аспайтын тізбек шенелген деп аталады.

$$\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \; |x_n| \leq M$$

Жоғарыдан және төменнен шенелу жеке қарастырылады. Екеуінің бірге орындалуы тізбектің шенелуіне мәндес.

M саны n-ге тәуелді болмауы керек.

Шенелуді тексеру мысалдары

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, \qquad 0 \le x_n < 1$$

Бұл тізбек шенелген. Мысалы, M=1 деп алуға болады.

$$y_n = n$$

Бұл тізбек жоғарыдан шенелмеген: кез келген M үшін n>M болатын натурал нөмір табылады.

Бірнеше алғашқы мүшені есептеу барлық n үшін шенелуді дәлелдемейді.

Ішкі тізбек

Тізбектің нөмірлері қатаң өсетін мүшелерін таңдап алсақ, ішкі тізбек шығады.

$$n_1 < n_2 < \cdots, \qquad (x_{n_k})_{k \geq 1}$$

$x_n = (-1)^n$ үшін жұп нөмірлі мүшелер $x_{2k} = 1$, тақ нөмірлі мүшелер $x_{2k-1} = -1$ болады.

Ішкі тізбекте бастапқы мүшелердің реті сақталады.

Жиі кездесетін қателер

Тиістілік пен ену	$x \in A$ элемент туралы, $B \subseteq A$ жиындар арасындағы қатынас туралы айтады.
Кванторлардың реті	$\forall x \exists y$ мен $\exists y \forall x$ әртүрлі тұжырымдар болуы мүмкін.
Жиын мен тізбек	Жиында рет ескерілмейді, ал тізбекте нөмір маңызды.
Шенелу	Барлық мүшелерге ортақ тұрақты шекара қажет.

Өзіндік жұмыс: жиындар мен логика

1. $A = [-2, 2)$, $B = (0, 4]$ үшін $A \cap B$ және $A \cup B$ табыңыз.

2. Сол A және B үшін $A \setminus B$ табыңыз.

3. $|x - 1| < 2$ теңсіздігін шешіңіз.

4. «Барлық $n \in \mathbb{N}$ үшін $x_n < 3$» тұжырымын терістеңіз.

5. $\emptyset$ және $\{\emptyset\}$ жиындары тең бе?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $A \cap B = (0, 2)$, $A \cup B = [-2, 4]$.

2. $A \setminus B = [-2, 0]$. Нөл B жиынына кірмейді.

3. $-1 < x < 3$.

4. Кемінде бір $n \in \mathbb{N}$ үшін $x_n \geq 3$.

5. Тең емес. Біріншісінде 0, екіншісінде 1 элемент бар.

Өзіндік жұмыс: сандық тізбектер

1. $x_n = (2n-1)/(n+1)$ тізбегінің алғашқы үш мүшесін жазыңыз.

2. $y_n = (-1)^n/(n+1)$ тізбегінің шенелгенін көрсетіңіз.

3. $x_n = n^2$ тізбегінің жоғарыдан шенелмегенін дәлелдеңіз.

4. $z_n = (-1)^n$ үшін жұп және тақ ішкі тізбектерді жазыңыз.

5. Индукция арқылы $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ теңдігін дәлелдеңіз.

Сандық тізбектерге жауаптар

1. $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5/4$.

2. $|y_n| = 1/(n+1) \le 1/2$.

3. Кез келген $M > 0$ үшін $n > \sqrt{M}$ алсақ, $n^2 > M$.

4. $z_{2k} = 1$, $z_{2k-1} = -1$.

5. База: $1 = 1^2$. Қадам: $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Жиынның элементі мен ішкі жиыны қалай ажыратылады?
2. Бірігу, қиылысу және айырма қалай анықталады?
3. Кванторлардың ретін ауыстыру мағынаны қалай өзгертеді?
4. Индукциялық дәлелдеу қандай қадамдардан тұрады?
5. Сандық тізбек пен оның мәндерінің жиыны несімен ерекшеленеді?
6. Шенелген тізбек пен ішкі тізбек қалай анықталады?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.