Математикалық талдау 1

4-дәріс

Функцияның үзіліссіздігі

Үзіліссіз функциялардың негізгі қасиеттері
Үзілістер және бірқалыпты үзіліссіздік

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: функцияны үзіліссіздікке зерттеу, үзіліс нүктелерін жіктеу және негізгі теоремаларды қолдану.

Нүктедегі үзіліссіздік

Анықтамалар және амалдар.
Аралық мән мен экстремумдар.
Үзіліс нүктелерінің түрлері.

Бірқалыпты үзіліссіздік

Кванторлардың реті.
Мысалдар және қарсы мысалдар.
Кантор теоремасы.

Алдыңғы дәрістегі шектер теориясы анықтамалар мен дәлелдеулердің негізі болады.

Нүктедегі үзіліссіздік

Функция a нүктесінде және оның маңайында анықталсын. Шегі нүктедегі мәніне тең болса, функция a-да үзіліссіз болады.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Мұнда f(a) анықталған, ақырлы шек бар және осы екі сан тең болуы керек.

Шектің бар болуының өзі үзіліссіздік үшін жеткіліксіз.

Эпсилон және дельта арқылы анықтама

a анықталу облысына тиісті болсын. Аргументтің жеткілікті кіші өзгерісі функция мәнінің де кіші өзгерісін береді.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Барлық $x \in D(f)$ қарастырылады. x=a кезінде теңсіздік автоматты түрде орындалады.

Берілген нүктеде дельта эпсилонға және сол нүктеге тәуелді болуы мүмкін.

Үзіліссіздіктің тізбектік критерийі

Функция a нүктесінде үзіліссіз болуы үшін және тек сол үшін төмендегі қасиет орындалуы қажет:

$$x_n \in D(f), \quad x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a)$$

Бұл қасиет a-ға ұмтылатын барлық тізбектер үшін тексеріледі. Мұнда $x_n = a$ болатын мүшелерге де рұқсат етіледі.

Критерий функция шегінің Гейне бойынша сипаттамасынан шығады.

Кесіндінің шеттеріндегі үзіліссіздік

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a<b болсын. Шеткі нүктелерге тек кесіндінің ішінен жақындаймыз.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$$

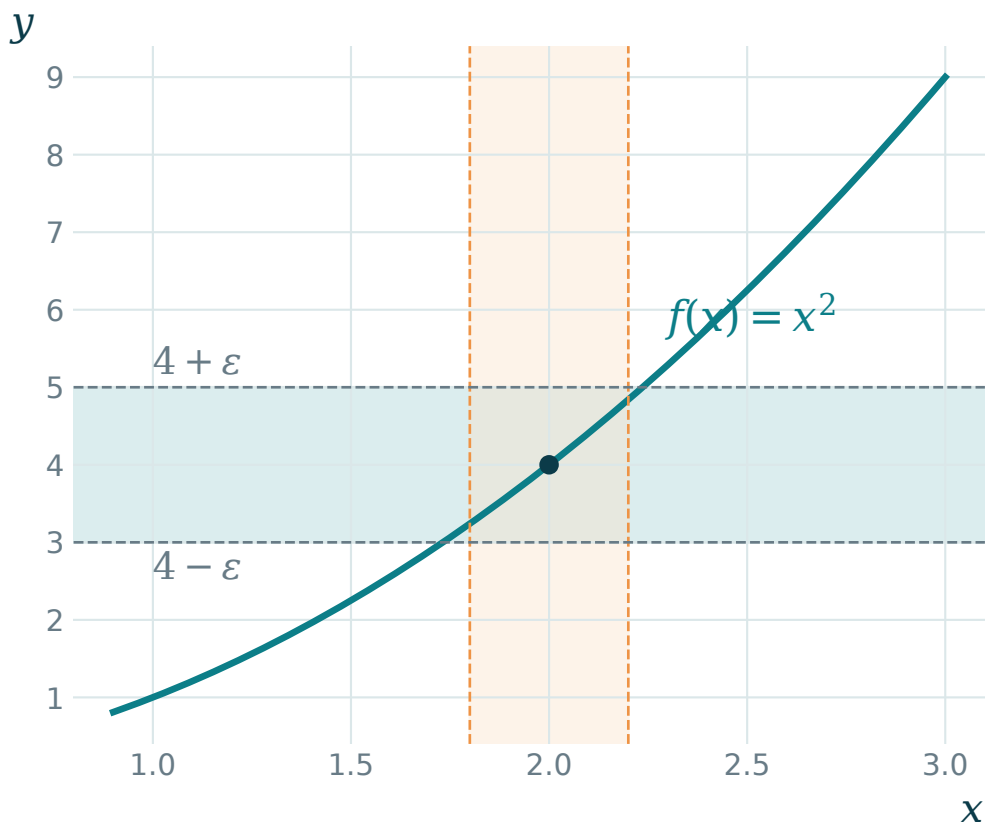
Кесіндіде үзіліссіздік ішкі нүктелердегі кәдімгі үзіліссіздікті және шеттердегі тиісті біржақты үзіліссіздікті қамтиды.

Анықтаманы квадраттық функцияға қолдану

$$f(x) = x^2, \qquad a = 2$$

$|x-2| < 1$ болса, $|x+2| < 5$.
Сондықтан $|x^2 - 4| < 5|x-2|$.

$\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ деп аламыз. Суретте $\varepsilon = 1$, $\delta = 0.2$.



Үзіліссіз функцияның жергілікті қасиеттері

Шенелу $\varepsilon = 1$ үшін жеткілікті кіші маңайда $|f(x)| < |f(a)| + 1$.

Таңбаның сақталуы f(a)>0 болса, жақын нүктелерде f(x)>0. Теріс мән үшін де ұқсас тұжырым бар.

Нөлден өзге мән $f(a) \neq 0$ болса, жеткілікті кіші маңайда $f(x) \neq 0$. Бұл бөліндіні қарастыруға мүмкіндік береді.

Үзіліссіз функцияларға амалдар қолдану

f және g функциялары a нүктесінде үзіліссіз, ал c тұрақты сан болсын.

$$f + g, \qquad cf, \qquad fg$$

Бұл функциялар да a нүктесінде үзіліссіз болады. Бөлінді үшін қосымша шарт қажет:

$$\frac{f}{g} \text{ үзіліссіз}, \qquad g(a) \neq 0$$

Күрделі функцияның үзіліссіздігі

g функциясы a-да үзіліссіз, ал F функциясы g(a) нүктесінде үзіліссіз болсын. Құрама функция a маңайында анықталсын.

$$\lim_{x \to a} F(g(x)) = F(g(a))$$

Дәлелдің реті: алдымен F үшін қажетті аралық дәлдікті, содан кейін g үшін сәйкес дельтаны таңдаймыз.

Мысалы, $\sin(x^2)$ және e^{x^2+1} барлық нақты x үшін үзіліссіз.

Элементар функциялардың үзіліссіздігі

Көпмүшелер	Барлық нақты сандарда үзіліссіз.
Рационал функциялар	Бөлімі нөлден өзге нүктелерде үзіліссіз.
Тригонометрия	Синус пен косинус барлық нақты сандарда үзіліссіз. Тангенс үшін $\cos x \neq 0$ қажет.
Дәреже және логарифм	e^x барлық нақты сандарда, $\ln x$ x>0 кезінде үзіліссіз. Түбірлер өз анықталу облысында үзіліссіз.

Бөліктеп берілген функцияны зерттеу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ ax + b, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(1-0) = 1, \qquad f(1+0) = f(1) = a + b$$

$$a + b = 1$$

Қалған нүктелерде әрбір бөлік көпмүше болғандықтан үзіліссіз.

Мән беру арқылы үзілісті жою

$$f(x) = \begin{cases} \sin x/x, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Бірінші тамаша шек бойынша нөлдегі шек 1-ге тең. Үзіліссіздік үшін нүктедегі мән де 1 болуы қажет.

$$c = 1$$

Аралық мән туралы теорема

f функциясы [a,b] кесіндісінде үзіліссіз болсын. f(a) мен f(b) арасындағы кез келген C мәні осы кесіндіде қабылданады.

$$\exists c \in [a, b] : \quad f(c) = C$$

C шеткі мәндердің қатаң арасында жатса, c нүктесін (a,b) аралығынан алуға болады.

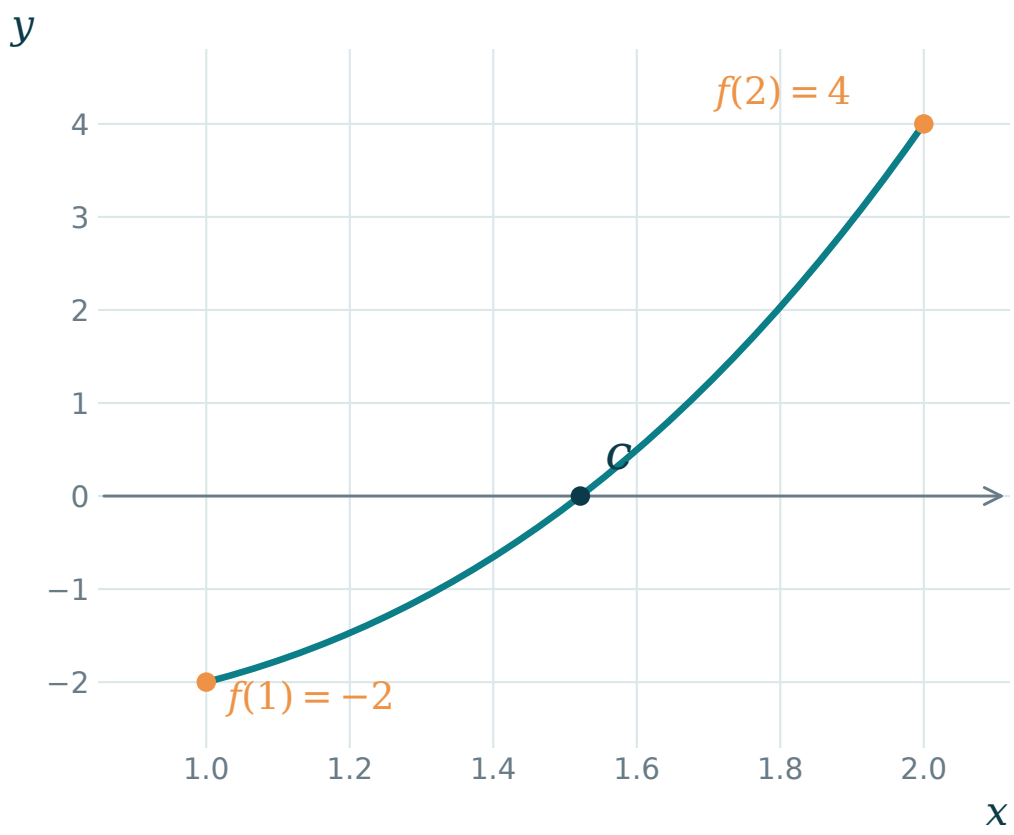
Теорема табылған нүктенің жалғыздығын талап етпейді.

Таңбасы өзгеретін функцияның нөлі

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

f(1)=-2, f(2)=4. Көпмүше [1,2] кесіндісінде үзіліссіз.

Аралық мән туралы теорема бойынша (1,2) аралығында кемінде бір c нүктесі үшін f(c)=0.



Кесіндіні қақ бөлу әдісі

Бастапқы шарт

f үзіліссіз және f(a)f(b)<0 болсын.

Орта нүкте

$m = (a + b)/2$ есептейміз. f(m)=0 болса, түбір табылды.

Жаңа кесінді

Шеттерінде таңбалар әртүрлі болып қалатын жарты кесіндіні таңдаймыз.

Қателік бағасы

k қадамнан кейін кесінді ұзындығы $(b - a)/2^k$. Оның ортасы үшін қателік $(b - a)/2^{k+1}$ шамасынан аспайды.

Қақ бөлу әдісінің мысалы

Бастапқы кесінді $[1, 2]$, f(1)=-2, f(2)=4.

1-қадам $m_1 = 1.5$, $f(m_1) = -0.125$. Жаңа кесінді: [1.5,2].

2-қадам $m_2 = 1.75$, $f(m_2) = 1.609375$. Жаңа кесінді: [1.5,1.75].

3-қадам $m_3 = 1.625$, $f(m_3) = 0.666015625$. Жаңа кесінді: [1.5,1.625].

Кесіндінің тізбектік қасиеті

[a,b] кесіндісіндегі кез келген тізбектен осы кесіндідегі нүктеге жинақталатын ішкі тізбек бөліп алуға болады.

$$x_{n_k} \to c, \qquad c \in [a, b]$$

Дәлел идеясы: кесіндіні екіге бөліп, шексіз көп мүше қалған жартысын таңдаймыз. Әрекетті қайталағанда ұзындықтары нөлге ұмтылатын кіріккен кесінділер алынады.

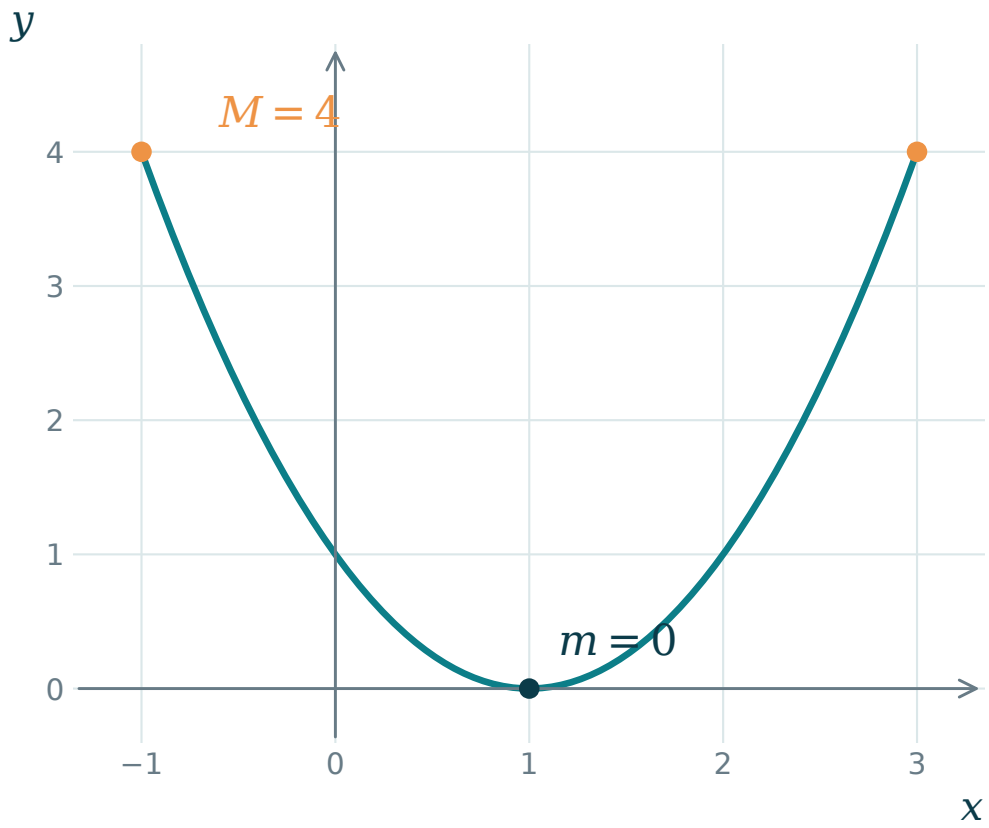
Нақты сандардың толықтығы ортақ c нүктесін береді. Өсетін нөмірлермен таңдалған мүшелер осы нүктеге ұмтылады.

Вейерштрасс теоремасы

Кесіндіде үзіліссіз функция шенелген және өзінің ең кіші, ең үлкен мәндерін қабылдайды.

$$m \leq f(x) \leq M$$

Кейбір $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ үшін $f(x_{\min}) = m$, $f(x_{\max}) = M$.



Кесіндіде шенелудің дәлелі

f функциясы [a,b]-де үзіліссіз, бірақ шенелмеген делік. Әр n үшін $|f(x_n)| > n$ болатын $x_n \in [a,b]$ таңдаймыз.

$$x_{n_k} \to c \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad f(x_{n_k}) \to f(c)$$

Үзіліссіздіктен оң жақтағы шек ақырлы. Бірақ $|f(x_{n_k})| > n_k \to +\infty$. Қайшылық алынды.

Демек, үзіліссіз функция тұтас жабық кесіндіде шенелген.

Ең үлкен мәннің қабылдануы

$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ болсын. Супремум анықтамасы бойынша $x_n \in [a,b]$ нүктелерін былай таңдаймыз:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

$x_{n_k} \to c$ болатын ішкі тізбек бар. Қысу теоремасынан $f(x_{n_k}) \to M$, ал үзіліссіздіктен $f(x_{n_k}) \to f(c)$. Сондықтан f(c)=M.

Ең кіші мән туралы тұжырымды -f функциясына қолданып аламыз.

Теорема шарттарының маңызы

Ашық аралық	$f(x)=x$ функциясы $(0,1)$-де үзіліссіз, бірақ ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдамайды.
Шенелмеген жиын	$f(x)=x$ функциясы нақты сандар жиынында үзіліссіз, бірақ шенелмеген.
Үзіліс бар болса	$[0,1]$-де $f(x)=x$ $(x<1)$, $f(1)=0$ болсын. Супремумы 1-ге тең, алайда ол қабылданбайды.

Кері функцияның үзіліссіздігі

f функциясы I аралығында үзіліссіз және қатаң монотонды болсын. Онда J=f(I) де аралық болады.

$$f^{-1} : J \to I \quad \text{үзіліссіз}$$

Монотондық кері функцияның бірмәнділігін, үзіліссіздік аралық мәндердің қабылдануын қамтамасыз етеді.

Мысалы, x^3 және оның кері функциясы $\sqrt[3]{x}$ бүкіл нақты осьте үзіліссіз.

Үзіліс нүктелерінің жіктелуі

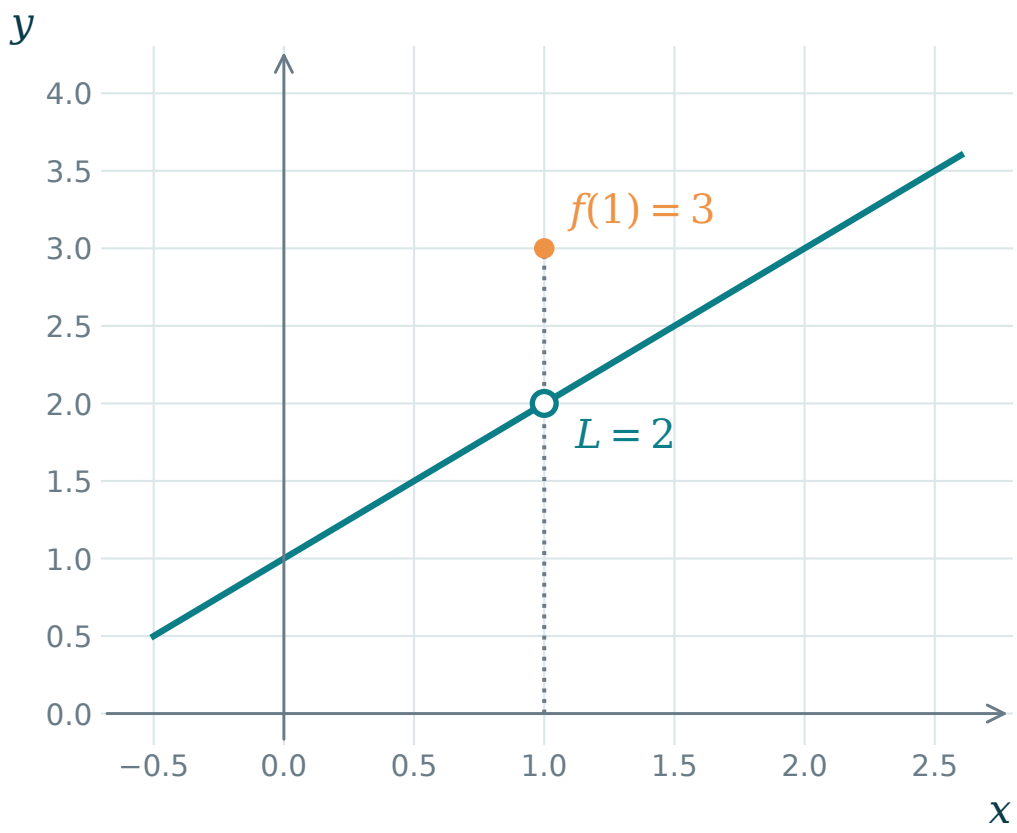
Бірінші текті	Екі біржақты шек те бар және ақырлы. Олардың теңдігіне қарай жойылатын үзіліс немесе секірмелі үзіліс шығады.
Екінші текті	Кемінде бір біржақты ақырлы шек жоқ. Мысалы, шексіздікке ұмтылу немесе шексіз тербеліс болуы мүмкін.
Қарастырылатын нүкте	Функция a нүктесінің тесілген маңайында анықталсын. a-дағы мәні берілмеуі де мүмкін.

Жойылатын үзіліс

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1. \end{cases}$$

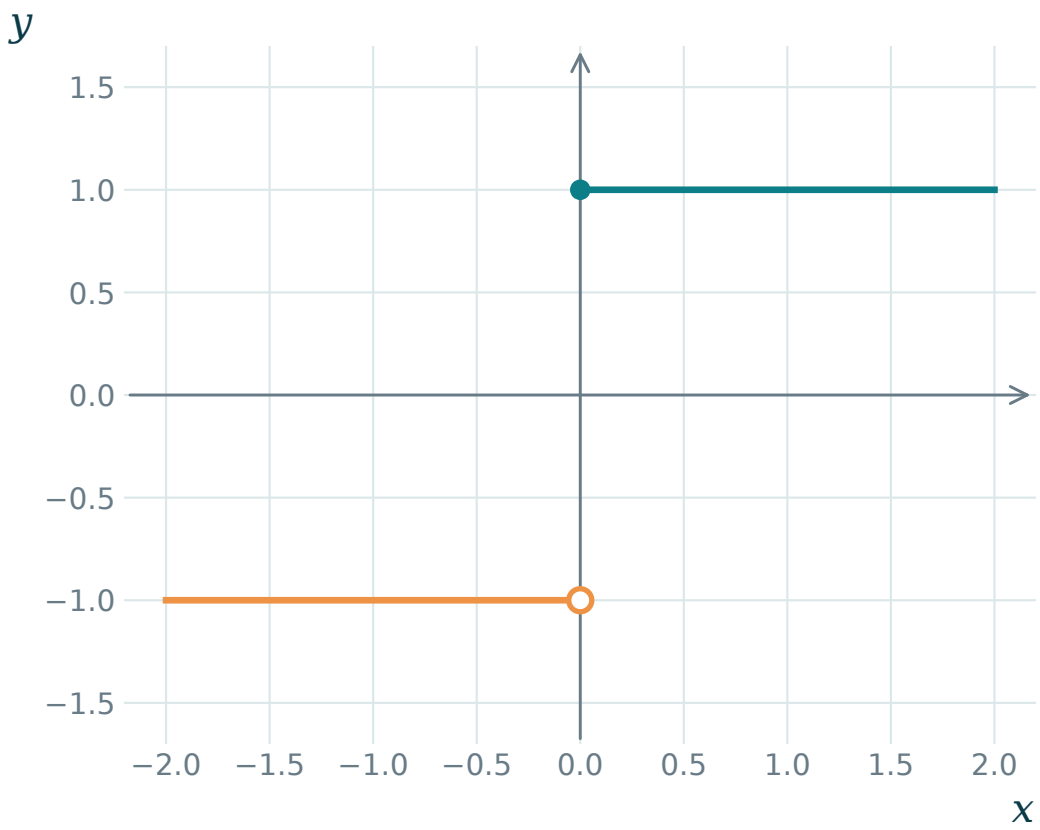
Екі біржақты шек те 2-ге тең. Бірақ f(1)=3 болғандықтан, функция үзіліссіз емес.

f(1)=2 деп қайта анықтасақ, үзіліс жойылады.



Секірмелі үзіліс

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

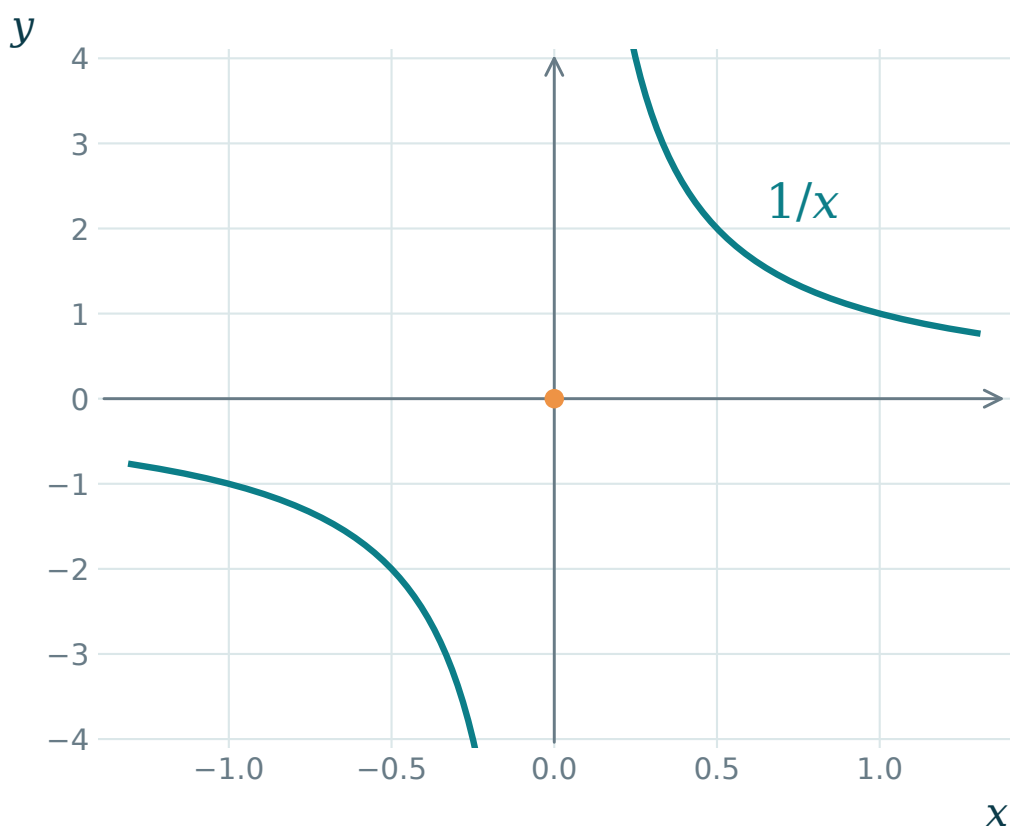


Сол жақ шек -1, оң жақ шек 1-ге тең.
Екеуі де ақырлы, бірақ әртүрлі.

Нүктедегі бір мәнді өзгерту екі жақтағы шектерді теңестіре алмайды.

Шексіз үзіліс

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

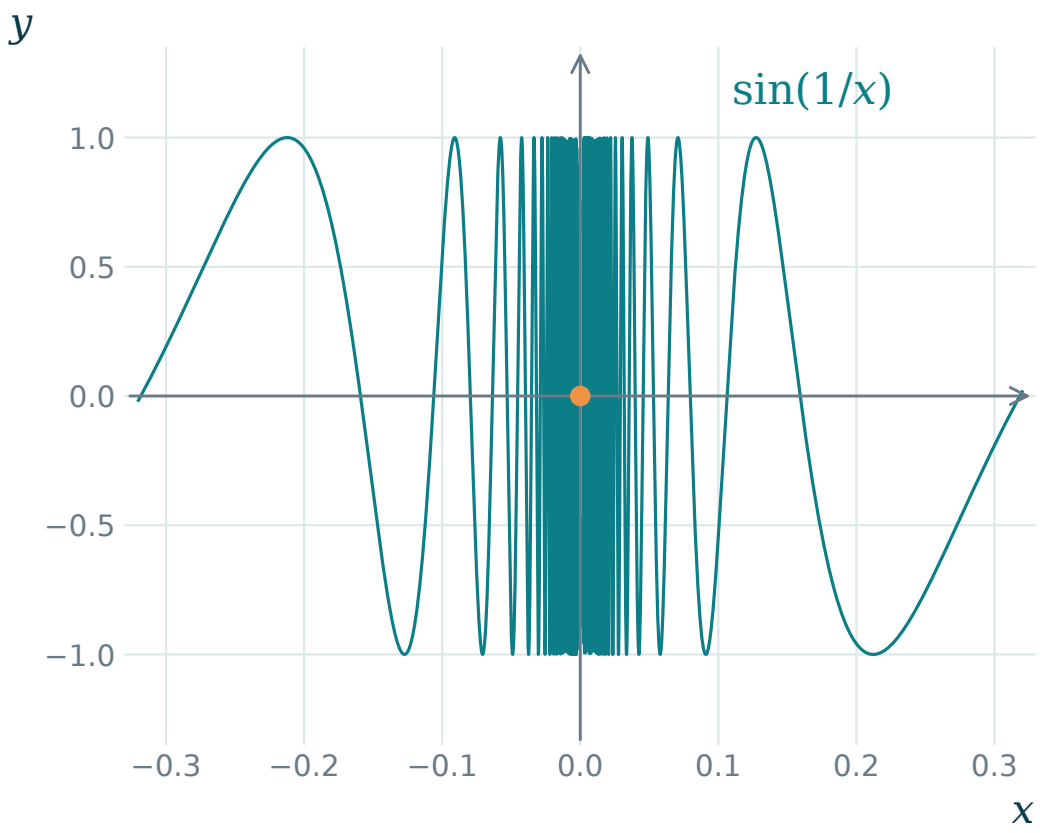


Нөлде сол жақтан шек теріс, оң жақтан оң шексіздікке тең. Ақырлы біржақты шектер жоқ.

Бұл екінші текті үзіліс болады.

Тербелмелі үзіліс

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Нөлге жақындағанда функция мәндері -1 мен 1 арасында тербеледі. Біржақты шектер де жоқ.

Функция шенелген болса да, екінші текті үзіліс болуы мүмкін.

Үзілісті жіктеу алгоритмі

1. Нүктедегі мән	f(a) анықталғанын және оның мәнін тексеру.
2. Біржақты шектер	Сол және оң жақ шектерді жеке табу.
3. Салыстыру	Шектер ақырлы әрі тең болса, оларды f(a)-мен салыстыру. Ақырлы, бірақ әртүрлі болса, секірмелі үзіліс.
4. Ақырлы шек жоқ	Кемінде бір жақта ақырлы шек болмаса, екінші текті үзіліс.

Бірқалыпты үзіліссіздік

Функция D жиынында бірқалыпты үзіліссіз болса, әрбір дәлдікке барлық нүктелер үшін жарайтын бір дельта табылады.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D : \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Дельта нүктелердің орналасуына тәуелді болмайды. Ол тек эпсилонға және қарастырылатын жиынға тәуелді болуы мүмкін.

Бірқалыпты үзіліссіз функция әрбір нүктеде үзіліссіз болады.

Нүктелік және бірқалыпты үзіліссіздік

Нүктелік Әрбір a үшін бөлек $\delta(\varepsilon, a)$ таңдауға болады.

Бірқалыпты Бір $\delta(\varepsilon)$ барлық x,y жұптарына жарауы керек.

Айырмашылық Негізгі мәселе функция мәндерінің жақындығының бүкіл жиында бір ережемен қамтамасыз етілуінде.

Кесіндідегі квадраттық функция

$f(x) = x^2$ функциясын [-A,A] кесіндісінде қарастырайық, A>0.

$$|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| \leq 2A|x - y|$$

Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \varepsilon/(2A)$ деп аламыз. Бұл дельта кесіндінің барлық x,y нүктелеріне ортақ.

Демек, квадраттық функция әрбір шенелген кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз.

Липшиц шарты және бірқалыпты үзіліссіздік

Барлық x,y үшін функция мәндерінің айырмасы аргументтер айырмасымен төмендегідей бағалансын:

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|, \qquad L > 0$$

Онда $\delta = \varepsilon / L$ таңдауы бірқалыпты үзіліссіздікті береді.

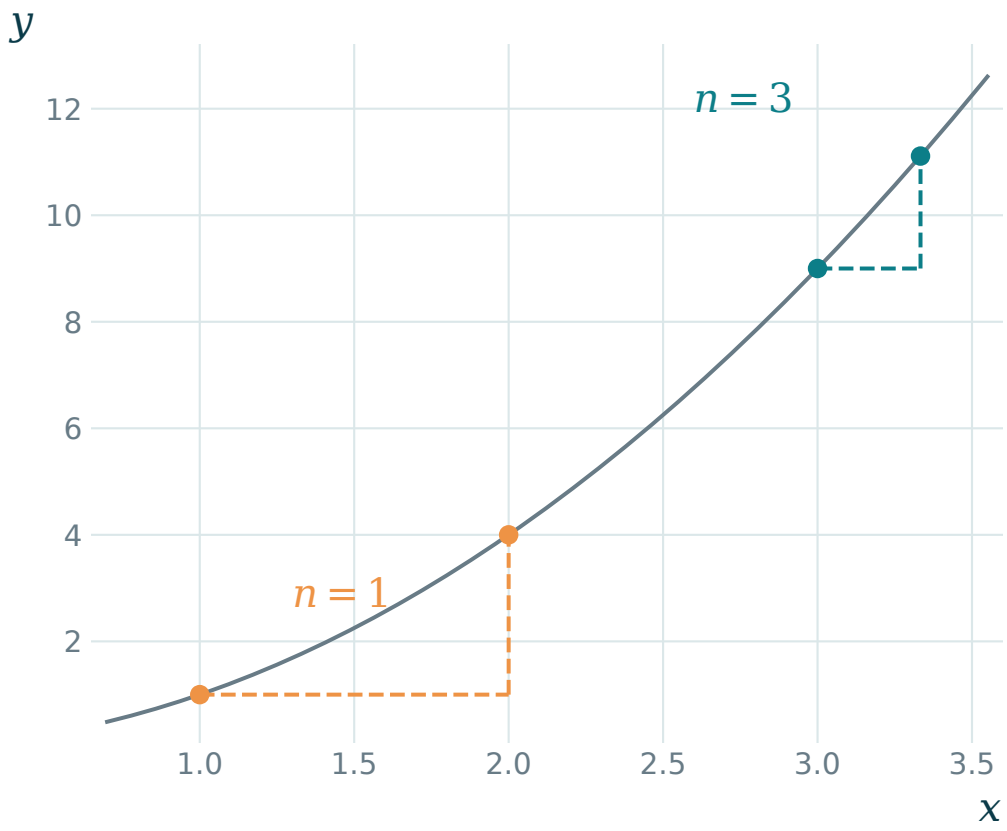
Мысалы, $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$. Сондықтан синус бүкіл нақты осьте бірқалыпты үзіліссіз.

Нақты осьте квадраттық функция

$$x_n = n, \qquad y_n = n + \frac{1}{n}$$

$|x_n - y_n| = 1/n \to 0$, бірақ
$|x_n^2 - y_n^2| = 2 + 1/n^2 > 2.$

Демек, f(x)=x² нақты осьте үзіліссіз болғанымен, бірқалыпты үзіліссіз емес.



Ашық аралықтағы кері шама

f(x)=1/x функциясы (0,1) аралығында үзіліссіз. Бірақ ол бұл аралықта бірқалыпты үзіліссіз емес.

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad y_n = \frac{1}{n+1}, \qquad n \geq 2$$

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| = 1$$

Аргументтер жақындағанымен, мәндер айырмасы нөлге ұмтылмайды.

Кантор теоремасы

Жабық шенелген [a,b] кесіндісінде үзіліссіз функция осы кесіндіде бірқалыпты үзіліссіз болады.

$$f \in C([a,b]) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ бірқалыпты үзіліссіз}$$

$C([a,b])$ белгісі кесіндіде үзіліссіз нақты функциялар жиынын білдіреді.

Кесінді туралы шарт жеткілікті. Басқа жиындарда қасиетті жеке зерттейміз.

Кантор теоремасының дәлел идеясы

Бірқалыпты үзіліссіздік жоқ делік. Бір $\varepsilon_0 > 0$ үшін кесіндіден мынадай жұптарды таңдауға болады:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

$x_{n_k} \to c$ болатын ішкі тізбек аламыз. Сонда $y_{n_k} \to c$ да орындалады. Үзіліссіздіктен екі функция мәні де f(c)-ге ұмтылады.

Олардың айырмасы нөлге ұмтылуы тиіс. Бұл төменгі оң бағаға қайшы.

Жиі кездесетін қателер

Шек пен мән	Ақырлы шектің болуы f(a) мәнімен теңдікті автоматты түрде бермейді.
Шенелу	Шенелген функцияда да үзіліс болуы мүмкін.
Теорема шарттары	Вейерштрасс және Кантор теоремаларында кесіндіде үзіліссіздік тексеріледі.
Ортақ дельта	Әр нүктедегі дельтаның бар болуы бүкіл жиынға ортақ дельтаның бар болуын білдірмейді.

Өзіндік жұмыс

1. $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ (x≠2), f(2)=c. Үзіліссіздік үшін c табыңыз.

2. x<0 кезінде f(x)=-1, x≥0 кезінде f(x)=2. Нөлдегі үзілістің түрін табыңыз.

3. f(x)=1/x функциясы (0,1)-де бірқалыпты үзіліссіз бе?

4. $x^3 + x - 1 = 0$ теңдеуінің (0,1)-де түбірі бар екенін дәлелдеңіз.

5. f(x)=x² функциясының [-2,3]-тегі ең кіші және ең үлкен мәндерін табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. c=4. Тесілген маңайда бөлінді x+2-ге тең.

2. Бірінші текті секірмелі үзіліс. Сол жақ шек -1, оң жақ шек 2.

3. Жоқ. $x_n = 1/n$, $y_n = 1/(n+1)$ (n≥2) қарсы мысал болады.

4. Көпмүше үзіліссіз, f(0)=-1 және f(1)=1. Аралық мән теоремасын қолданамыз.

5. Ең кіші мәні 0, x=0 кезінде. Ең үлкен мәні 9, x=3 кезінде.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Нүктедегі үзіліссіздіктің үш шарты қандай?
2. Үзіліс нүктелері біржақты шектер бойынша қалай жіктеледі?
3. Аралық мән туралы теорема түбірдің бар болуын қалай береді?
4. Вейерштрасс теоремасы қандай шарттармен орындалады?
5. Нүктелік және бірқалыпты үзіліссіздіктің айырмасы неде?
6. Кантор теоремасында кесіндінің рөлі қандай?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.