# Математикалық талдау 1

5-дәріс

# Туынды және дифференциалдану

Геометриялық және физикалық мағынасы
Негізгі ережелер мен элементар туындылар

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

# Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: туындыны анықтама арқылы табу, дифференциалдануды түсіндіру және негізгі туынды ережелерін қолдану.

## Туынды ұғымы

Өсімшелердің қатынасы.
Жанама және лездік жылдамдық.
Дифференциалдану мен үзіліссіздік.

## Есептеу ережелері

Қосынды, көбейтінді және бөлінді.
Дәрежелік және тригонометриялық функциялар.
Экспонента мен логарифм.

Нүктедегі туынды ақырлы екіжақты шек арқылы анықталады.

# Аргумент пен функцияның өсімшелері

a нүктесінен a+h нүктесіне көшкенде аргумент өсімшесі h-қа тең.

$$\Delta x = h, \qquad \Delta y = f(a+h) - f(a)$$

Функция өсімшесі бастапқы a нүктесіне де, h өсімшесіне де тәуелді. h оң да, теріс те болуы мүмкін.

Қатынасты қарастырғанда $h \neq 0$ және a+h анықталу облысында болуы керек.

# Нүктедегі туындының анықтамасы

Функция a нүктесінің маңайында анықталсын. Төмендегі ақырлы шек бар болса, ол f функциясының a-дағы туындысы деп аталады.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Белгілеулер: $f'(a)$, $y'(a)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

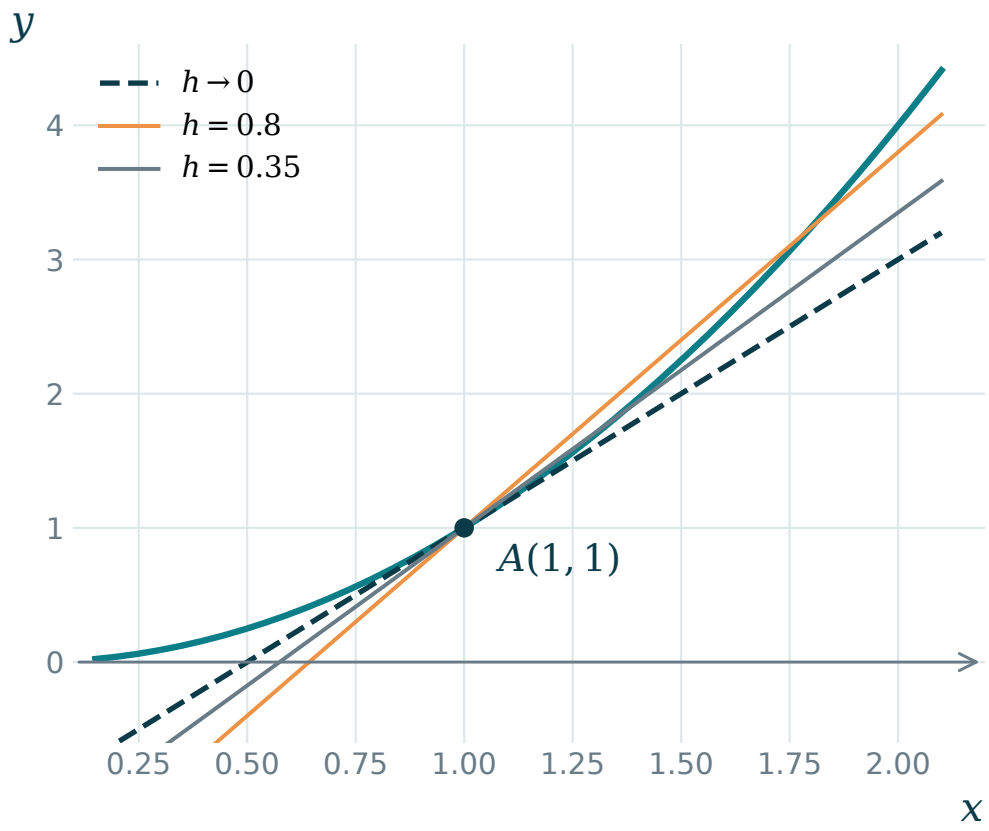
Туындының анықтамасы функция мәндерін тікелей қоюдан басталмайды.

# Қиюшыдан жанамаға өту

$$k_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Бұл A және B нүктелері арқылы өтетін қиюшының бұрыштық коэффициенті.

h нөлге ұмтылғанда $k_h \to f'(a)$. Ақырлы шек жанаманың көлбеулігін береді.



# Жанаманың теңдеуі

а нүктесінде ақырлы туынды бар болса, графикке жүргізілген жанаманың теңдеуі:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

f(x)=x², a=1 үшін f(1)=1 және $f'(1) = 2$. Сондықтан:

$$y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$$

Жанама міндетті түрде жанасу нүктесі арқылы өтеді.

# Туындының физикалық мағынасы

s(t) орын ауыстыруды сипаттасын. Орташа жылдамдық уақыт аралығына тәуелді болады.

$$v_{\text{орт}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}, \qquad v(t) = s'(t)$$

Мысалы, t секундпен, s метрмен өлшеніп, s(t)=2t²-3t+1 болсын. Сонда:

$$v(t) = 4t - 3, \qquad v(1) = 1 \text{ м/с}$$

# Квадраттық функцияның туындысы

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

h нөлге ұмтылғанда соңғы өрнек 2a санына ұмтылады.

$$(x^2)' = 2x$$

Алдымен өсімшені ашып, h-қа қысқартамыз. Қысқарту h нөлден өзге болғанда орындалады.

# Квадрат түбірдің туындысын анықтамамен табу

f(x)=√x функциясын a>0 нүктесінде қарастырайық. Түйіндес өрнекке көбейтеміз:

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

a>0 шарты екіжақты маңайды және нөлдік емес бөлімді қамтамасыз етеді.

# Дифференциалданатын функция

Функция өсімшесін сызықтық бөлік пен одан кіші ретті қалдықтың қосындысы түрінде жазуға болсын:

$$\Delta f = Ah + o(h), \qquad h \to 0$$

Мұнда A ақырлы сан, ал $o(h)/h \to 0$. Осындай жіктеу бар болса, f функциясы a нүктесінде дифференциалданады.

Бұл анықтама функцияның нүкте маңындағы сызықтық жуықталуын сипаттайды.

# Туынды мен дифференциалданудың байланысы

Дифференциалдану нүктедегі ақырлы туындының бар болуына мәндес. Жіктеудегі A коэффициенті туындыға тең.

$$\frac{\Delta f}{h} = A + \frac{o(h)}{h} \longrightarrow A$$

Кері бағытта туынды анықтамасынан $\Delta f = f^{'}(a)h + r(h)$, мұндағы $r(h)/h \to 0$.

Сондықтан сызықтық бөліктің коэффициенті бірмәнді анықталады.

# Дифференциалданудан үзіліссіздіктің шығуы

f функциясы a нүктесінде дифференциалдансын. Оның өсімшесі:

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+o(h)$$

h нөлге ұмтылғанда оң жақ нөлге ұмтылады. Демек, $f(a+h)\to f(a)$.

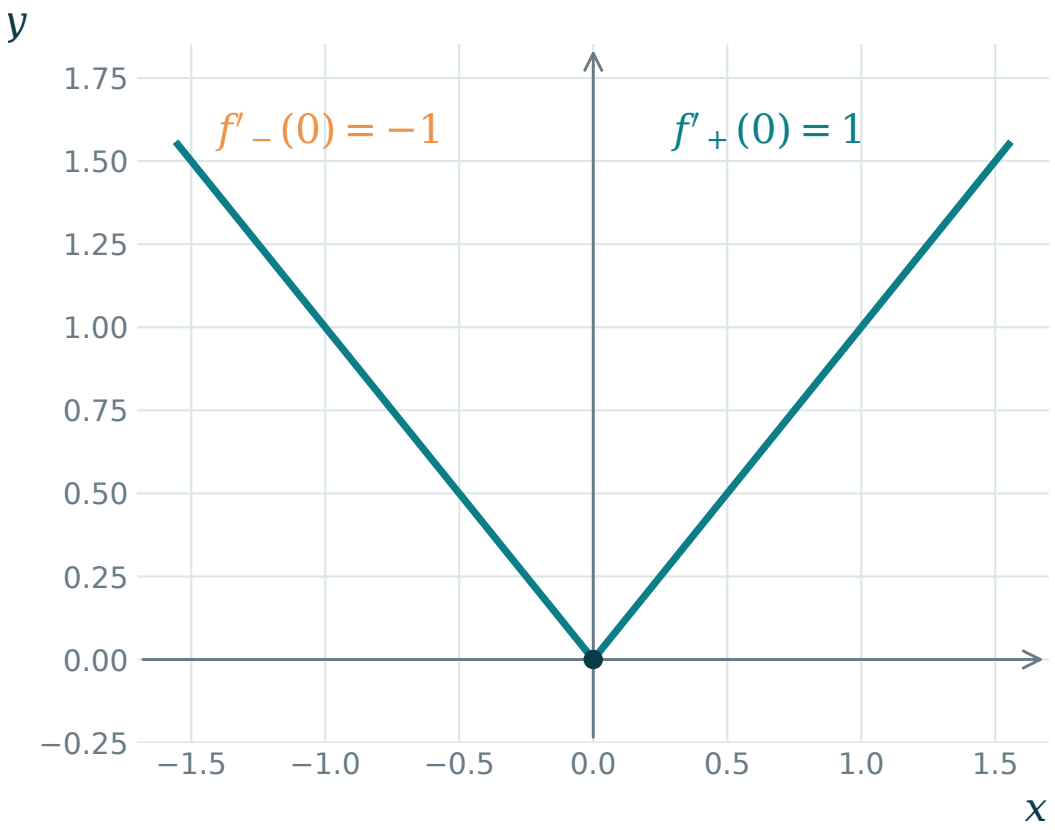
Ақырлы туындысы бар функция сол нүктеде міндетті түрде үзіліссіз.

# Үзіліссіздік пен дифференциалдану

$$f(x) = |x|, \qquad f(0) = 0$$

$h > 0$ болса, $|h|/h = 1$. $h < 0$ болса, $|h|/h = -1$.

Екіжақты шек жоқ. Функция нөлде үзіліссіз, бірақ дифференциалданбайды.



# Біржақты туындылар

**Оң жақ туынды**

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+0} [f(a+h) - f(a)]/h.$$

**Сол жақ туынды**

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0-0} [f(a+h) - f(a)]/h.$$

**Ақырлы туынды**

Екіжақты ақырлы туынды бар болуы үшін және тек сол үшін екі біржақты туынды бар, ақырлы және тең болуы қажет.

# Тербелетін функцияның нөлдегі туындысы

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin(1/h), \qquad |h \sin(1/h)| \leq |h|$$

Қысу теоремасы бойынша $f'(0) = 0$. Тербелістің болуы өздігінен туындының жоқ екенін білдірмейді.

# Қосынды және тұрақты көбейткіш

f және g функциялары a нүктесінде дифференциалдансын. c тұрақты сан болсын.

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (cf)' = cf'$$

Өсімшелердің қатынасын қосындыға жіктеп, шектердің сызықтылығын қолданамыз.

Тұрақты функция үшін өсімше нөлге тең. Сондықтан $(c)' = 0$.

# Көбейтіндінің туындысы

f және g дифференциалданатындықтан, a нүктесінде үзіліссіз. Өсімшені екі бөлікке жіктейміз:

$$\frac{\Delta(fg)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Шекке өткенде:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

# Бөліндінің туындысы

g(a)≠0 болсын. Алдымен кері шама 1/g үшін өсімшелердің қатынасын қарастырамыз:

$$\frac{1/g(a+h)-1/g(a)}{h}=-\frac{g(a+h)-g(a)}{h\,g(a+h)g(a)}\to-\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Нәтиже көбейтінді ережесін f·(1/g) өрнегіне қолданудан шығады.

# Натурал дәреженің туындысы

m натурал сан болсын. Дәрежелер айырмасының алгебралық формуласын қолданамыз:

$$\frac{(a+h)^m - a^m}{h} = \sum_{k=0}^{m-1} (a+h)^{m-1-k} a^k$$

Қосындыда m қосылғыш бар. Әрбір қосылғыштың шегі a-ның m-1 дәрежесіне тең.

$$\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$$

# Кері дәрежелер және квадрат түбір

$$(x^{-m})' = -mx^{-m-1}, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad x \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Бірінші формула натурал дәреже мен бөлінді ережесінен шығады. Квадрат түбірдің ақырлы туындысы x>0 кезінде қарастырылады.

# Тригонометриялық шектер

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$\frac{\cos h-1}{h}=-\frac{2\sin^2(h/2)}{h}\longrightarrow 0$$

Бірінші тамаша шек пен тригонометриялық тепе-теңдік синус пен косинустың туындыларын анықтамадан шығаруға мүмкіндік береді.

# Синустың туындысын қорытып шығару

Қосу формуласын қолданып, айырмалық қатынасты түрлендіреміз:

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\sin a\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos a\,\frac{\sin h}{h}$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

Бұрыш радианмен өлшенеді.

# Косинустың туындысы

$$\cos(a+h)-\cos a=\cos a(\cos h-1)-\sin a\sin h$$

h-қа бөліп, h нөлге ұмтылғандағы шекті табамыз. Бірінші бөлік нөлге, екіншісі -sin a шамасына ұмтылады.

$$(\cos x)'=-\sin x$$

Минус таңбасы қосу формуласынан шығады.

# Тангенс пен котангенстің туындылары

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Тангенс үшін cos x≠0, котангенс үшін sin x≠0 шарттары орындалуы қажет.

# Экспонента мен логарифмге қажетті шектер

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

Бірінші шек екінші тамаша шекке үзіліссіз логарифмді қолданудан шығады: $\ln((1+t)^{1/t})\to \ln e=1$.

Екінші шек үшін $t=e^h-1$ деп алып, h=ln(1+t) теңдігін қолданамыз. Бұл ауыстыруда t нөлге ұмтылады.

# Экспонентаның туындысы

$$\frac{e^{a+h}-e^{a}}{h}=e^{a}\frac{e^{h}-1}{h}\longrightarrow e^{a}$$

$$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$$

Натурал экспонентаның өзгеру жылдамдығы әр нүктеде өзінің сол нүктедегі мәніне тең.

# Натурал логарифмнің туындысы

a>0 болсын. Логарифмдердің айырмасын бір логарифмге біріктіреміз:

$$\frac{\ln(a+h)-\ln a}{h}=\frac{1}{a}\,\frac{\ln(1+h/a)}{h/a}\longrightarrow\frac{1}{a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\qquad x>0$$

# Жалпы негізді экспонента және логарифм

a>0 үшін $a^x = e^{x \ln a}$. Экспоненталық шекте h·ln a алмастыруын қолданамыз.

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0, \quad a \neq 1$$

a=1 кезінде $a^x$ тұрақты функция болады, ал негізі 1 болатын логарифм анықталмайды.

# Негізгі туындылар кестесі

| | |
|---|---|
| Тұрақты және дәреже | $(c)' = 0$, $(x^m)' = m x^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$. |
| Кері шама, түбір | $(1/x)' = -1/x^2$ (x≠0), $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ (x>0). |
| Экспонента | $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$ (a>0). |
| Логарифм | $(\ln x)' = 1/x$, $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, x>0, a>0, a≠1. |

# Тригонометриялық туындылар кестесі

| | |
|---|---|
| Синус | $(\sin x)' = \cos x.$ |
| Косинус | $(\cos x)' = -\sin x.$ |
| Тангенс | $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$, cos x≠0. |
| Котангенс | $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$, sin x≠0. |

# Көпмүшені дифференциалдау

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$$

Қосынды ережесін және натурал дәреженің туындысын әрбір мүшеге жеке қолданамыз:

$$f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$$

Тұрақты қосылғыштың туындысы нөлге тең.

# Көбейтіндіні дифференциалдау мысалы

$$f(x) = x^2 \sin x$$

$$f'(x) = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Әрбір көбейткіштің туындысы екінші көбейткішпен бірге алынады.

# Бөліндіні дифференциалдау мысалы

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

# Анықталу облысын тексеру

| | |
|---|---|
| Бөлінді | Бөлім нөлге тең болатын нүктелер бастапқы функцияның облысына кірмейді. |
| Логарифм | Нақты ln x үшін x>0 қажет. |
| Квадрат түбір | √x нөлде оң жақтан үзіліссіз, бірақ ақырлы оң жақ туындысы жоқ: $1/\sqrt{h} \to +\infty$. |
| Формуланы қолдану | Туындының формуласы мен оның қолданылатын облысын бірге көрсетеміз. |

# Жиі кездесетін қателер

| | |
|---|---|
| Көбейтінді | Жалпы жағдайда $(fg)' \neq f'g'$. |
| Бөлінді | Алымда $f'g - fg'$ айырмасы, бөлімде $g^2$ болады. |
| Үзіліссіздік | Үзіліссіз функцияның туындысы міндетті түрде бар болмайды. |
| Нүкте мен функция | f′(a) бір сан, ал f′(x) туынды анықталған нүктелердегі функцияны береді. |

# Өзіндік жұмыс

1. $f(x)=5x^3-2x+1$ функциясының туындысын табыңыз.
2. $f(x)=x\cdot\cos x$ функциясының туындысын табыңыз.
3. $f(x)=(x+1)/(x-1)$ функциясын дифференциалдаңыз.
4. $f(x)=\ln x$ графигіне $x=1$ нүктесінде жанама жүргізіңіз.
5. $f(x)=|x|$ функциясының нөлдегі сол және оң жақ туындыларын табыңыз.

# Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $f'(x) = 15x^2 - 2$.

2. $f'(x) = \cos x - x \sin x$.

3. $f'(x) = -2/(x-1)^2$, x≠1.

4. f(1)=0, f′(1)=1. Жанама: y=x-1.

5. $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Екіжақты туынды жоқ.

# Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Туынды функция өсімшесінің қандай шегі арқылы анықталады?
2. Туындының геометриялық және физикалық мағынасы қандай?
3. Дифференциалдану неліктен үзіліссіздікті береді?
4. Көбейтінді мен бөліндінің туындылары қалай табылады?
5. Тригонометриялық туындыларда қандай өлшем бірлігі қолданылады?
6. Элементар туынды формулаларында анықталу облысы неге маңызды?

# Әдебиеттер

## Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

## Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.