13-дәріс

Иррационал және тригонометриялық интегралдар

Түбірлерді рационалдау және тригонометриялық алмастырулар
Дәрежелер, жарты бұрыш және әдісті таңдау

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: түбірлі және тригонометриялық өрнектерді тиімді алмастыру арқылы кестелік не рационал интегралға келтіру.

Иррационал өрнектер

Сызықтық өрнектен түбір.
Ортақ бөлімді дәрежелер.
Квадраттық түбірлерге алмастыру.

Тригонометриялық өрнектер

Тақ және жұп дәрежелер.
Логарифмге келетін интегралдар.
Әмбебап жарты бұрыш алмастыруы.

Әр алмастыруда нақты мәнділік, таңба және бастапқы айнымалыға кері оралу тексеріледі.

Иррационал өрнекті рационалдау

Негізгі идея	Түбірді жаңа айнымалы ретінде алып, x пен dx-ті сол айнымалы арқылы жазамыз.
Бірнеше түбір	Бөлшек көрсеткіштердің бөлімдеріне ортақ еселік таңдаймыз.
Квадраттық түбір	Алдымен толық квадратты бөліп алып, сәйкес тригонометриялық алмастыруды қарастырамыз.
Нәтиже	Рационал интеграл шықса, 12-дәрістегі бөлу мен жай бөлшектер әдісін қолданамыз.

Сызықтық өрнектен түбірді алмастыру

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx, \qquad x > -1, \quad x \neq 0$$

$t = \sqrt{x+1}$, x=t²−1, $dx = 2t\,dt$. t>0 және t≠1 болатын аралықтарды қарастырамыз.

$$\int \frac{2t^2}{t^2-1}\,dt = \int \left(2 + \frac{2}{t^2-1}\right) dt$$

Бастапқы түбірлі интеграл рационал интегралға келді.

Түбірлі интегралды есептеуді аяқтау

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$$

$$2t + \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$$

Формула (−1,0) және (0,+∞) аралықтарында жеке қолданылады.

Бөлшек дәрежелердің ортақ бөлімі

R рационал функция болсын. x>0 кезінде $x^{m_1/q}, \dots, x^{m_s/q}$ бар өрнекке:

$$t = x^{1/q}, \qquad x = t^q, \qquad dx = qt^{q-1}\,dt$$

алмастыруын қолданамыз. Барлық бөлшек дәрежелер t-нің бүтін дәрежелеріне айналады.

Бөлімдер әртүрлі болса, олардың ең кіші ортақ еселігі алынады.

Квадрат және куб түбір бірге кездескенде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, \qquad x>0$$

2 мен 3-тің ең кіші ортақ еселігі 6. $t = x^{1/6}$ десек, $x=t^6$, $dx = 6t^5\,dt$.

$$\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt$$

$t>0$ болғандықтан, t^2 көбейткішіне қысқарту заңды.

Ортақ түбір алмастыруының нәтижесі

$$\frac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

Интегралдағаннан кейін $2t^3-3t^2+6t-6\ln(t+1)+C$ шығады. Бастапқы айнымалыға ораламыз:

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6x^{1/6} - 6\ln(1+x^{1/6}) + C$$

Нәтиже $x>0$ аралығында туынды арқылы тексеріледі.

Квадраттық түбірге алмастыруды таңдау

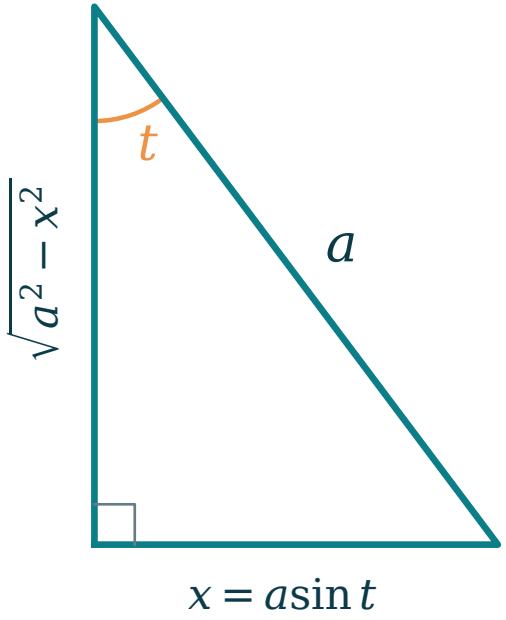
$\sqrt{a^2 - x^2}$	x=a sin t, −π/2<t<π/2. Сонда түбір a cos t-ге тең.
$\sqrt{a^2 + x^2}$	x=a tan t, −π/2<t<π/2. Сонда түбір a sec t-ге тең.
$\sqrt{x^2 - a^2}$	x>a үшін x=a sec t, 0<t<π/2. Сонда түбір a tan t-ге тең.

Мұнда a>0 және sec t=1/cos t. Басқа тармақтарда таңба мен аралық бөлек таңдалады.

x=a sin t алмастыруының геометриясы

$$x = a\sin t, \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$

Сурет 0<t<π/2 жағдайын көрсетеді. Гипотенуза a, қарсы жатқан катет x, іргелес катет квадрат түбірге тең.



Таңдалған аралықта cos t>0. Квадрат түбірдің таңбасы осы шартпен негізделеді.

Жарты шеңберге сәйкес алғашқы функция

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ үшін x=a sin t, $dx = a\cos t\,dt$ деп аламыз:

$$a^2 \int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

Формула |x|<a аралығында алғашқы функцияны береді.

x=a tan t алмастыруына мысал

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}, \qquad a>0$$

x=a tan t үшін $dx = a\sec^2 t\,dt$, ал түбір a sec t. Сондықтан интеграл $(1/a^2)\int \cos t\,dt$ болады.

$$\frac{\sin t}{a^2} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

Бұл нәтиже барлық нақты x үшін дұрыс.

Квадраттық түбірден шығатын логарифмдер

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

a>0. Бірінші формула нақты осьте, екіншісі |x|>a болатын әр аралықта қолданылады. Екеуі де туындымен тікелей тексеріледі.

Эйлер типті рационалдаушы алмастыру

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

Түйіндес өрнектердің көбейтіндісі 1-ге тең: $1/t = \sqrt{x^2+1} - x$. Екі теңдіктен:

$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right), \qquad dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

x және квадрат түбір t арқылы рационал өрнектеледі.

Рационалдаушы алмастыруды қолдану

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right) dt$$

Нәтиже (1/2) ln t−1/(4t²)+C. t-нің мәнін орнына қоямыз:

$$\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C$$

Алмастыру мен жауап барлық нақты x үшін анықталған.

Тригонометриялық интегралға алғашқы қадам

Құрылымды қарау	sin және cos дәрежелері тақ па, жұп па екенін тексереміз.
Бір туындыны бөлу	sin x dx немесе cos x dx көбейткішін бөліп алып, қалғанын $1-\cos^2 x$ не $1-\sin^2 x$ арқылы жазамыз.
Тепе-теңдіктер	Екі дәреже де жұп болса, жарты бұрыш формулалары көмектеседі.
Жалпы рационал өрнек	Қарапайым тәсіл шықпаса, $t=\tan(x/2)$ алмастыруын қарастырамыз.

Синустың тақ дәрежесі

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx, \qquad u = \cos x, \quad du = -\sin x \, dx$$

$\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$, ал $\sin^2 x = 1 - u^2$. Сондықтан:

$$-\int (1-u^2)u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

Жауап: $-\cos^3 x/3 + \cos^5 x/5 + C$.

Косинустың тақ дәрежесі

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx, \qquad u = \sin x, \quad du = \cos x \, dx$$

$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x$, ал $\cos^2 x = 1 - u^2$. Сондықтан:

$$\int u^2 (1 - u^2) \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

Жауап: $\sin^3 x/3 - \sin^5 x/5 + C$.

Екі дәреже де жұп болғанда

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$$

Тепе-теңдік интегралды кестелік қосындыға айналдырады:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} + C$$

Ішкі аргумент 4x болғандықтан, қосымша 1/4 коэффициенті пайда болады.

Тангенс пен котангенстің интегралдары

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

Бірінші жағдайда u=cos x, екіншісінде u=sin x деп аламыз. Бөлім нөлге айналмайтын аралықтар жеке қарастырылады.

1/cos x интегралы

sec x=1/cos x болсын. $u = \sec x + \tan x$ деп алсақ, $u' = \sec x(\sec x + \tan x)$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

cos x≠0 болатын аралықта sec x+tan x те нөл болмайды. Сондықтан u′/u логарифмдік түрі қолданылады.

Бұл формула доға ұзындығын есептеуде де кездеседі.

sin x және cos x-тен рационал өрнек

$R(\sin x, \cos x)$ рационал өрнегін қарастырайық. Жарты бұрыш алмастыруы екі функцияны да рационалдайды:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Осыдан интеграл t бойынша рационал функцияның интегралына айналады.

Алмастыру x=(2k+1)π нүктелері кірмейтін аралықта орындалады.

Жарты бұрыш: дифференциал

$$x = 2\arctan t + 2k\pi, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

sin, cos және dx түгел t арқылы өрнектеледі. Мысалы:

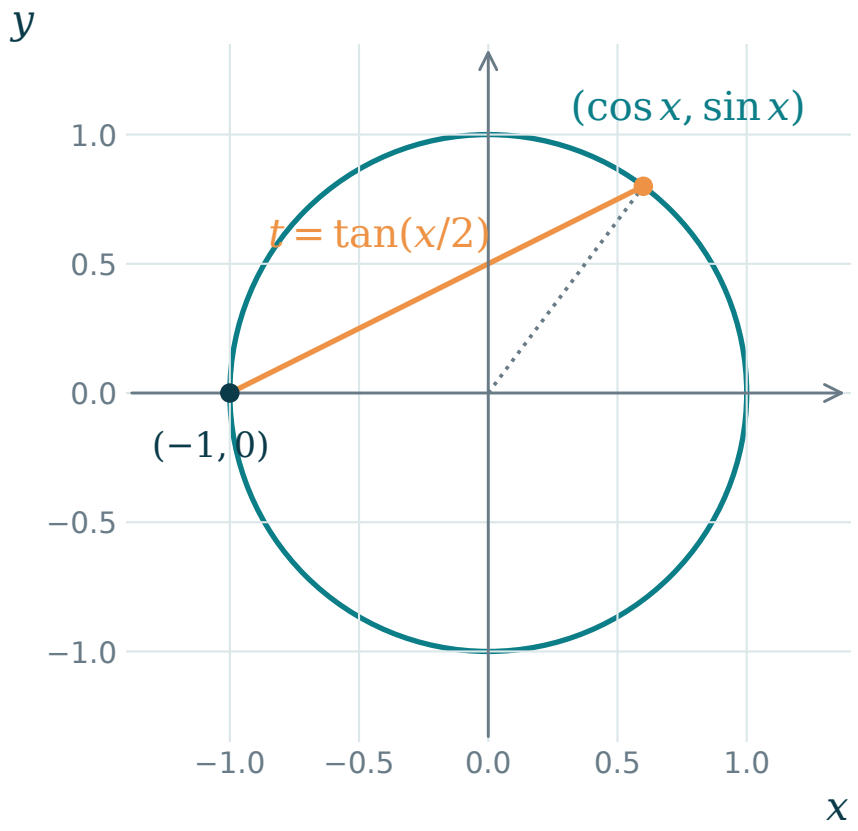
$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Бірлік шеңбердегі рационал параметр

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2} = t$$

(-1,0) нүктесінен шеңбердегі нүктеге жүргізілген түзудің көлбеулігі t-ге тең. Бұл параметр sin x пен cos x-ті рационал өрнектейді.

Суретте t=1/2, cos x=3/5, sin x=4/5.



Жарты бұрышқа қарапайым мысал

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}, \qquad t = \tan\frac{x}{2}$$

$1+\cos x = 2/(1+t^2)$ және $dx = 2\,dt/(1+t^2)$.

$$\int dt = t + C = \tan\frac{x}{2} + C$$

Бастапқы өрнек те $x=(2k+1)\pi$ нүктелерінде анықталмаған.

Жалпырақ мысал: 1/(2+cos x)

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{2\,dt}{3+t^2}$$

Қалған интеграл арктангенс кестесіне келеді:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Формула (−π+2kπ,π+2kπ) аралықтарының әрқайсысында алғашқы функция береді.

Жаңа айнымалының үзілістерін ескеру

$1/(2+\cos x)$ барлық нақты x үшін үзіліссіз. Бірақ $t=\tan(x/2)$ алмастыруы тақ π нүктелерінде анықталмайды.

Бұл бастапқы функцияның үзілісі емес. Арктангенстің негізгі тармағы көршілес аралықтарда әртүрлі тұрақтыларды қажет етуі мүмкін.

Бір аралықтағы формуланы оның алмастыруы анықталмаған нүкте арқылы тексерусіз жалғастырмаймыз.

Әдісті таңдаудың қысқа жоспары

Түбірлер	Ортақ түбір не квадраттық түбірге сәйкес алмастыруды қарау.
Тақ дәрежелер	sin x dx не cos x dx көбейткішін бөліп алып, бір функцияға көшу.
Жұп дәрежелер	Жарты бұрыш және қос бұрыш тепе-теңдіктерін қолдану.
Рационал тригонометрия	Қарапайым түрлендіру жеткіліксіз болса, t=tan(x/2) алмастыруын қолдану.

Алдымен қарапайым алмастыруды байқау

$$\int x \sin(x^2)\, dx, \qquad u = x^2, \quad du = 2x\, dx$$

Бұл есепте sin x және cos x-тен рационал өрнек жоқ: синустың ішкі аргументі x^2. Тізбекті ережені кері қолданамыз:

$$\frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

Әмбебап алмастырудан бұрын өрнектің ішкі құрылымы тексеріледі.

Жиі кездесетін қателер

Түбір таңбасы	$\sqrt{(a^2\cos^2 t)} = a\lvert\cos t\rvert$. Модульді ашу таңдалған аралықпен негізделеді.
Дифференциал	Алмастыру кезінде dx та өзгереді; тек функцияның өзін ауыстыру жеткіліксіз.
Кері оралу	Соңғы жауап бастапқы x айнымалысы арқылы беріледі.
Жасанды үзіліс	Жаңа айнымалының анықталмауы бастапқы функцияның үзілісі болмауы мүмкін.

Өзіндік жұмыс

1. $\int dx/(1+\sqrt{x})$, x>0 интегралын табыңыз.

2. $\int \sin^3 x\,dx$ интегралын табыңыз.

3. $\int \cos^2 x\,dx$ интегралын табыңыз.

4. $\int dx/(3+2\cos x)$ интегралын t=tan(x/2) арқылы табыңыз.

5. $\int dx/(x^2+4)^{3/2}$ интегралын табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$.

2. $-\cos x + \cos^3 x/3 + C$.

3. $x/2 + \sin(2x)/4 + C$.

4. $(2/\sqrt{5})\arctan(\tan(x/2)/\sqrt{5}) + C$; әр тармақ аралығында.

5. $x/(4\sqrt{x^2+4}) + C$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Бірнеше бөлшек дәреже үшін ортақ алмастыру қалай таңдалады?

2. Квадраттық түбірге тригонометриялық алмастыру жасағанда таңба қалай тексеріледі?
3. sin не cos тақ дәрежеде болса, қандай көбейткішті бөліп аламыз?

4. Екі дәреже де жұп болса, қандай тепе-теңдіктер тиімді?

5. t=tan(x/2) үшін sin x, cos x және dx қалай өрнектеледі?

6. Әмбебап алмастырудағы тармақ аралығы не үшін қажет?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.