Математикалық талдау 1

6-дәріс

Дифференциалдау әдістері

Күрделі және кері функциялардың туындылары
Дифференциал және жоғары ретті туындылар

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: құрама және кері функцияларды дифференциалдау, дифференциалмен жуықтау және жоғары ретті туындыларды табу.

Дифференциалдау әдістері

Тізбекті ереже.
Кері функция және кері тригонометрия.
Логарифмдік дифференциалдау.

Дифференциал және жоғары реттер

Сызықтық жуықтау.
Екінші және n-ші туындылар.
Лейбниц формуласы.

Әр ережеде функциялардың анықталу облысы мен қажетті туындылардың бар болуы тексеріледі.

Күрделі функцияның құрылымы

Функцияны ішкі және сыртқы бейнелеулердің тізбегі ретінде қарастырамыз.

$$u = g(x), \qquad y = F(u), \qquad y = F(g(x))$$

Мысалы, y=sin(x²) үшін ішкі функция u=x², сыртқы функция F(u)=sin u.

Туындыны табу алдында функцияның қабаттарын ажыратамыз.

Күрделі функцияның туындысы

g функциясы a-да, ал F функциясы g(a) нүктесінде дифференциалдансын.

$$(F \circ g)'(a) = F'(g(a))\, g'(a)$$

Бұл тізбекті ереже деп аталады. Сыртқы функцияның туындысы ішкі аргументте есептеліп, ішкі функцияның туындысына көбейтіледі.

Ереже g′(a)=0 кезінде де орындалады.

Тізбекті ереженің дәлел идеясы

$\Delta u = g(a+h) - g(a) = g^{'}(a)h + o(h)$ болсын. Сыртқы функцияның дифференциалдануы бойынша:

$$\Delta y = (F^{'}(g(a)) + \eta(\Delta u))\Delta u, \qquad \eta(t) \to 0$$

η(0)=0 деп алуға болады. Сондықтан Δu=0 болған жағдай да қамтылады. h-қа бөліп, шекке өткенде туындылар көбейтіндісі шығады.

Бұл дәлелдеуде ішкі өсімшеге бөлу талап етілмейді.

Екі қабатты функцияға мысал

$$y = \sin(x^2), \qquad u = x^2$$

$$F'(u) = \cos u, \qquad u' = 2x$$

$$y' = 2x \cos(x^2)$$

Ішкі функцияның туындысы 2x көбейткіші түрінде сақталады.

Бірнеше қабаттан тұратын функция

$$y = e^{\sin(3x)}$$

Қабаттарды сыртынан ішіне қарай ажыратамыз: экспонента, синус, сызықтық функция.

$$y' = e^{\sin(3x)} \cos(3x) \cdot 3$$

Әр қабат өзінің туынды көбейткішін береді.

Логарифм мен түбірі бар құрама функциялар

$$\left(\ln(1+x^2)\right)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$$

Логарифмнің аргументі барлық x үшін оң. Екінші формула ашық (-1,1) аралығында қолданылады.

Нақты дәреженің туындысы

α кез келген нақты сан, x>0 болсын. $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ түрінде жазамыз.

$$\left(x^{\alpha}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Бүтін дәрежелер үшін формуланың мүмкін кеңірек анықталу облысын жеке ескереміз.

Кері функция ұғымы

f функциясы I аралығында үзіліссіз және қатаң монотонды болсын. Онда J=f(I) аралығында кері функция анықталады.

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Кері функция аргумент пен мәннің рөлдерін ауыстырады. Оның графигі бастапқы графиктің y=x түзуіне қатысты симметриялы бейнесі болады.

Кері функцияның белгіленуі f^{-1}, ал 1/f кері шаманы білдіреді.

Кері функцияның туындысы туралы теорема

f үзіліссіз және қатаң монотонды болсын. Ішкі x_0 нүктесінде туындысы бар және $f'(x_0) \neq 0$ болсын.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \qquad y_0 = f(x_0)$$

Туынды бастапқы функцияның сәйкес x_0 нүктесінде есептеледі. Бұл нүктені y_0 арқылы анықтау қажет.

$f'(x_0)=0$ болса, бұл формуланы қолдануға болмайды.

Кері функция формуласының дәлелі

Кері функция үзіліссіз болғандықтан, Δy нөлге ұмтылғанда Δx те нөлге ұмтылады.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)^{-1}$$

Қатаң монотондықтан нөлдік емес өсімшелер бір-біріне сәйкес келеді. Жақша ішіндегі шек нөлден өзге туындыға тең.

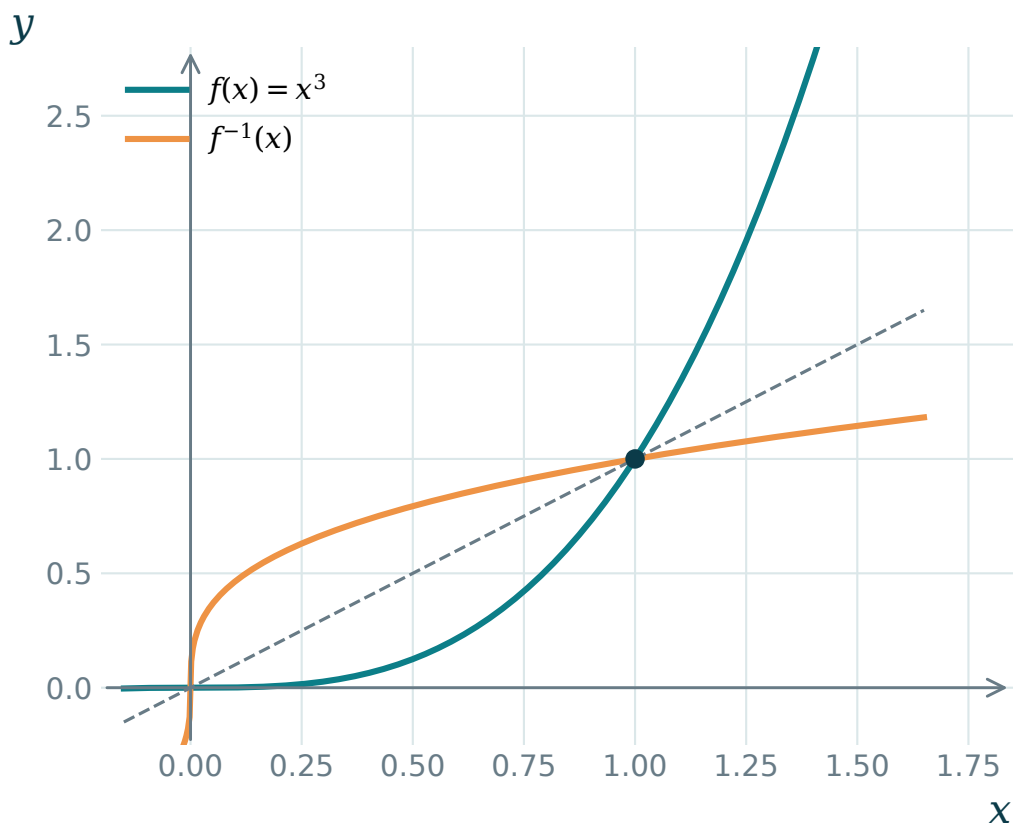
Кері шаманың шегі туралы қасиет теореманы дәлелдейді.

Кубтық функцияның кері функциясы

$$f(x) = x^3, \qquad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

$x_0=1$ кезінде $y_0=1$ және $f'(1)=3$. Сондықтан кері функцияның 1-дегі туындысы 1/3 болады.

$x_0=0$ кезінде бастапқы туынды нөлге тең. Куб түбірдің нөлде ақырлы туындысы жоқ.



Арксинустың туындысы

y=arcsin x болса, x=sin y және $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Ішкі нүктелерде cos y>0.

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad |x| < 1$$

Оң квадрат түбір негізгі мәндер аралығынан таңдалады.

Арккосинустың туындысы

y=arccos x болса, x=cos y және 0≤y≤π. Ішкі нүктелерде sin y>0.

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$$

Минус таңбасы косинустың туындысынан шығады.

Арктангенс пен арккотангенстің туындылары

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Арктангенс үшін $(-\pi/2, \pi/2)$, арккотангенс үшін $(0, \pi)$ негізгі мәндер аралығын қолданамыз. Екі туынды да барлық нақты x үшін бар.

Кері тригонометриялық туындылар кестесі

Арксинус	$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, |x|<1.
Арккосинус	$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$, |x|<1.
Арктангенс	$(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
Арккотангенс	$(\operatorname{arccot} x)' = -1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Кері тригонометриялық құрама функциялар

$$\left(\arcsin(2x)\right)' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \qquad |x| < \frac{1}{2}$$

$$\left(\arctan(x^2)\right)' = \frac{2x}{1+x^4}$$

Кері функцияның туындысымен бірге ішкі функцияның туындысы да көбейткіш ретінде алынады.

Логарифмдік дифференциалдау

$y = u(x)^{v(x)}$, u(x)>0 болсын. Екі функция да дифференциалдансын. $\ln y = v \ln u$ теңдігін дифференциалдаймыз:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u} \right)$$

Айнымалы негіз бен айнымалы дәреже

$$y = x^x, \qquad x > 0, \qquad \ln y = x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Негіз де, дәреже де өзгеретіндіктен, жай дәрежелік ереже жеткіліксіз.

Функцияның дифференциалы

Тәуелсіз x аргументі үшін $dx = \Delta x$ деп аламыз. Дифференциал функция өсімшесінің сызықтық бөлігі болады.

$$dy = f'(x)\,dx$$

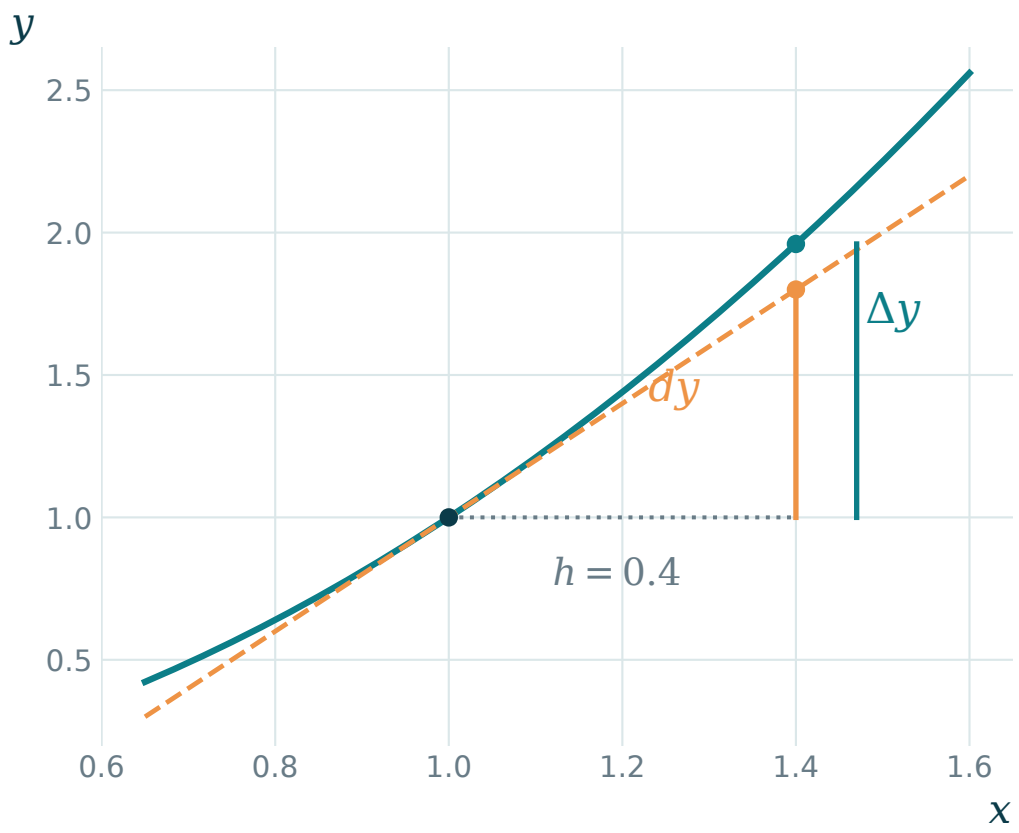
Дифференциалдану анықтамасынан $\Delta y = dy + o(dx)$. Сондықтан dx кіші болғанда Δy-ті dy арқылы жуықтауға болады.

dy аргумент өсімшесіне сызықтық тәуелді.

Өсімше мен дифференциалдың айырмасы

$$f(x) = x^2, \quad x = 1, \quad dx = h$$

$$\Delta y = 2h + h^2, \qquad dy = 2h$$



h=0.4 кезінде Δy=0.96, ал dy=0.8.
Айырмасы h^2=0.16-ға тең.

Өсімше мен дифференциал жалпы жағдайда тең емес.

Сызықтық жуықтау формуласы

a нүктесінде дифференциалданатын функция үшін h кіші болғанда:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$$

Жуықтаудың қалдығы o(h) болады. Бұл дәл теңдік емес, бірінші ретті жуықтау.

Егер $f'(a) = 0$ болса, dy=0 болуы мүмкін, ал Δy нөлден өзге болуы мүмкін.

Квадрат түбірді жуықтап есептеу

√4.04 мәнін f(x)=√x функциясының a=4 нүктесіндегі сызықтық жуықтауымен табайық.

$$f(4) = 2, \qquad f'(4) = \frac{1}{4}, \qquad h = 0.04$$

$$\sqrt{4.04} \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.04 = 2.01$$

Нақты мәні шамамен 2.009975, сондықтан қателік шамамен 0.000025.

Салыстырмалы өсімшені жуықтау

Шар көлемін радиустың функциясы ретінде қарастырайық. Радиус оң және оның өсімшесі кіші болсын.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad dV = 4\pi r^2\, dr$$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}$$

Радиустың салыстырмалы өсімі 1% болса, көлемнің салыстырмалы өсімі шамамен 3% болады.

Дифференциалға қолданылатын амалдар

$$d(f+g) = df + dg, \qquad d(cf) = c\,df$$

$$d(fg) = g\,df + f\,dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}, \qquad g \neq 0$$

Барлық дифференциалдар бір тәуелсіз аргументке қатысты алынады.

Бірінші дифференциалдың пішіні

y=F(u), u=g(x) болсын. Тізбекті ережеден:

$$dy = F'(u)g'(x)\,dx, \qquad du = g'(x)\,dx$$

$$dy = F'(u)\,du$$

u тәуелсіз аргумент болса да, x-тің функциясы болса да, бірінші дифференциал осы пішінді сақтайды.

Екінші туынды

f′ функциясы x нүктесінің маңайында анықталып, сол нүктеде дифференциалдансын. Оның туындысы екінші туынды деп аталады.

$$f''(x) = (f')'(x)$$

Қозғалыс үшін s′(t) жылдамдықты, s″(t) үдеуді береді. Мысалы, s(t)=2t²-3t+1 үшін s″(t)=4.

Екінші туындының бар болуы қосымша дифференциалдануды талап етеді.

Құрама функцияның екінші туындысы

y=F(g(x)) функциясын екі рет дифференциалдаймыз. Көбейтінді мен тізбекті ережелерді бірге қолданамыз.

$$y' = F'(g(x))g'(x)$$

$$y'' = F''(g(x))(g'(x))^2 + F'(g(x))g''(x)$$

Екінші туындыда екі қосылғыштың да сақталуы маңызды.

Екінші туындыны есептеу мысалы

$$y = \sin(x^2), \qquad y' = 2x\cos(x^2)$$

$$y'' = 2\cos(x^2) + 2x(-\sin(x^2)) \cdot 2x$$

$$y'' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)$$

Жоғары ретті туындылар

Туындыларды қайта-қайта дифференциалдау арқылы жоғары ретті туындыларды анықтаймыз.

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', \qquad n \geq 2$$

Белгілеулер: f'', f''', $f^{(4)}$, ..., $f^{(n)}$. Кезекті туынды бар болғанда ғана келесі рет анықталады.

n-ші туындыны есептегенде алдыңғы реттің формуласын қолданамыз.

Көпмүшелердің жоғары туындылары

$$f(x) = x^4 : \quad f' = 4x^3, \quad f'' = 12x^2, \quad f''' = 24x$$

$$f^{(4)} = 24, \qquad f^{(5)} = 0$$

Жалпы, m натурал сан үшін:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & 1 \le n \le m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Экспонента мен синустың жоғары туындылары

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin(ax+b) = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

Синусты дифференциалдағанда фазасы π/2-ге ығысып, әр қадамда a көбейткіші пайда болады. n≥1 деп аламыз.

Логарифм мен кері шаманың туындылары

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad x > 0$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{x} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad x \neq 0$$

n≥1. Формулалар бірінші туындыдан басталып, индукциямен тексеріледі.

Лейбниц формуласы

f және g функциялары n рет дифференциалдансын. Көбейтіндінің n-ші туындысы:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Мұнда $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$. Бином коэффициенттері көбейтінді ережесін қайталап қолданғанда пайда болады.

Дәлел индукция мен Паскаль теңдігіне сүйенеді.

Лейбниц формуласын қолдану

$f(x) = x^2 e^x$, n≥2 болсын. x² функциясының үшінші және одан жоғары туындылары нөлге тең.

$$f^{(n)} = x^2 e^x + n(2x)e^x + \frac{n(n-1)}{2} 2e^x$$

$$f^{(n)} = e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)$$

Мысалы, n=3 үшін $e^x(x^2 + 6x + 6)$ алынады.

Жоғары ретті дифференциалдар

x тәуелсіз айнымалы, dx тұрақты өсімше ретінде қарастырылсын. Сонда:

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

$$y = \ln x: \qquad d^2y = -\frac{(dx)^2}{x^2}, \qquad d^3y = \frac{2(dx)^3}{x^3}$$

Бұл формула тәуелсіз аргумент таңдалғаннан кейін қолданылады.

Екінші дифференциалдың түрленуі

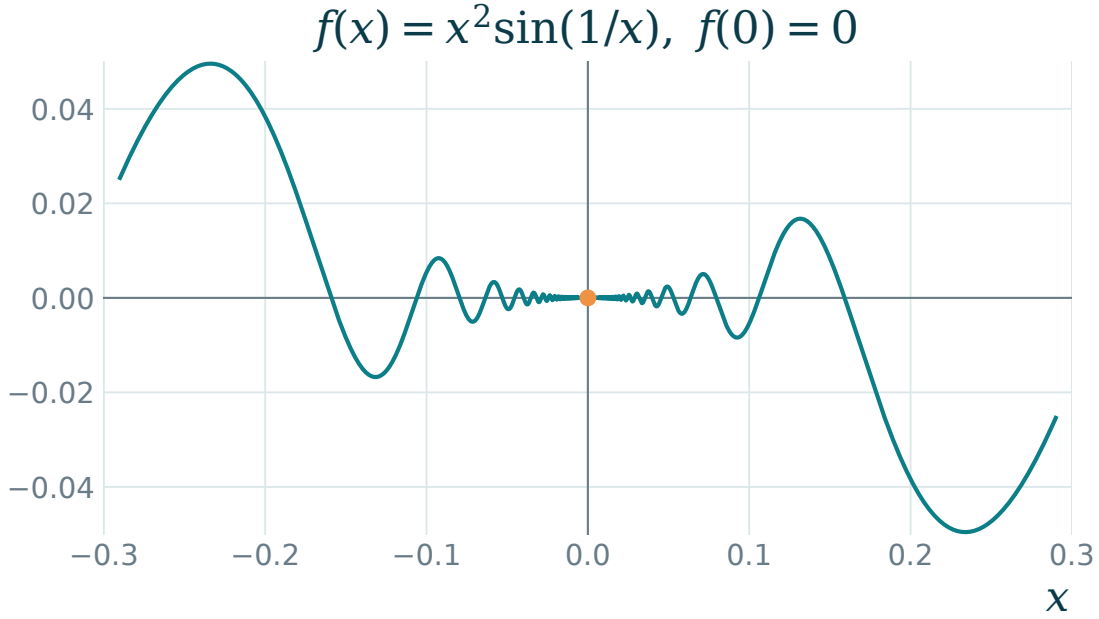
y=F(u), u=u(x), ал x тәуелсіз болсын. Екінші дифференциал үшін қосымша мүше пайда болады:

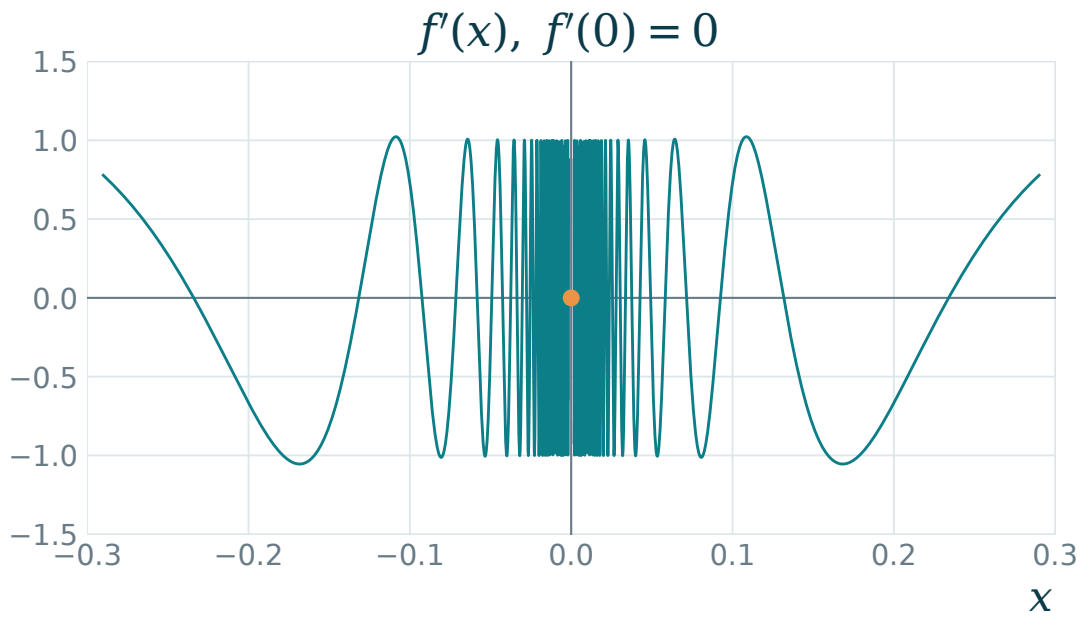
$$d^2y = F''(u)(du)^2 + F'(u)d^2u$$

Мысалы, $y=u^2$, $u=x^2$ болса, $y=x^4$. Екі қосылғышты да есептейміз:

$$d^2y = 8x^2(dx)^2 + 4x^2(dx)^2 = 12x^2(dx)^2$$

Туындының үзіліссіздігі





$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad (x \neq 0)$$

$f'(0) = 0$ болғанымен, туынды нөлде үзіліссіз емес.

Жиі кездесетін қателер

Ішкі туынды	Құрама функцияда ішкі функцияның туындысын көбейтуді ұмытпау керек.
Кері функция	f^{-1} мен 1/f әртүрлі ұғымдар. Кері функция туындысында сәйкес бастапқы нүкте табылады.
Дифференциал	dy жалпы жағдайда Δy-ке тең емес.
Жоғары дифференциал	$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$ формуласында x тәуелсіз болуы қажет.

Өзіндік жұмыс: дифференциалдау әдістері

1. y=sin(3x²) функциясының туындысын табыңыз.

2. $y = \ln(1 + e^x)$ функциясының туындысын табыңыз.

3. y=arcsin(x²) функциясын дифференциалдаңыз, |x|<1.

4. f(x)=x³ болса, кері функцияның y=8 нүктесіндегі туындысын табыңыз.

5. $y = x^{\sin x}$ функциясының туындысын табыңыз, x>0.

Дифференциалдау әдістеріне жауаптар

1. $y' = 6x\cos(3x^2)$.

2. $y' = e^x/(1+e^x)$.

3. $y' = 2x/\sqrt{1-x^4}$, |x|<1.

4. x=2, f′(2)=12. Сондықтан $(f^{-1})'(8) = 1/12$.

5. $y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \sin x/x)$.

Өзіндік жұмыс: дифференциал мен туындылар

1. $y=x^3$ үшін $x=2$, $dx=0.01$ кезінде dy табыңыз.

2. Сызықтық жуықтау арқылы $\sqrt{9.06}$ мәнін есептеңіз.

3. $y=\sin(2x)$ функциясының екінші және n-ші туындыларын табыңыз.

4. $f(x) = x^2 e^x$ функциясының үшінші туындысын табыңыз.

5. $y=\ln x$ функциясының екінші дифференциалын жазыңыз, x тәуелсіз.

Дифференциал мен жоғары реттерге жауаптар

1. dy=3x²dx=0.12.

2. √9.06≈3+(1/6)·0.06=3.01.

3. $y'' = -4\sin 2x$, $y^{(n)} = 2^n \sin(2x + n\pi/2)$.

4. $f'''(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$.

5. $d^2y = -(dx)^2/x^2$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Тізбекті ереже бірнеше қабатқа қалай қолданылады?
2. Кері функцияның туындысы үшін қандай шарттар қажет?
3. Логарифмдік дифференциалдау қай кезде ыңғайлы?
4. Дифференциал мен функция өсімшесінің айырмасы неде?
5. Көбейтіндінің n-ші туындысы қалай есептеледі?
6. Жоғары дифференциалда тәуелсіз аргументті көрсету неге маңызды?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.