Математикалық талдау 1

7-дәріс

Негізгі теоремалар және Лопиталь ережесі

Ферма, Ролль, Лагранж және Коши теоремалары
Анықталмағандықтарды ашу

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: негізгі теоремалардың шарттарын тексеру, оларды дәлелдеуде және шектерді есептеуде қолдану.

Дифференциалдық есептеу

Ферма және Ролль теоремалары.
Лагранждың орта мән теоремасы.
Коши теоремасы және салдарлар.

Шектерді есептеу

0/0 және шексіздік/шексіздік.
Көбейтінділер мен айырмалар.
Дәрежелік анықталмағандықтар.

Теореманың қорытындысын қолданудан бұрын оның барлық шарты тексеріледі.

Ферма теоремасы

c аралықтың ішкі нүктесі болсын. f функциясы c-де жергілікті максимумға не минимумға ие болып, ақырлы туындысы бар болса:

$$f^{'}(c) = 0$$

Теорема ішкі экстремум нүктесіндегі туындыға қажетті шарт береді.

Шеткі нүктедегі экстремум үшін бұл қорытынды міндетті емес.

Ферма теоремасының дәлелі

c жергілікті максимум нүктесі болсын. Жеткілікті кіші h үшін f(c+h)−f(c)≤0.

$$h > 0: \ \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0, \qquad h < 0: \ \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$$

Ақырлы екіжақты туынды бар болғандықтан, ол бір мезгілде нөлден үлкен емес және нөлден кіші емес. Демек, туынды нөлге тең.

Минимум жағдайында теңсіздіктердің бағыттары ауысады; қорытынды өзгермейді.

Қажетті шарттың шектеулері

Жеткілікті емес

$f(x) = x^3$ үшін $f'(0) = 0$, бірақ нөлде экстремум жоқ: функция таңбасын өзгертеді.

Туынды болмауы мүмкін

$f(x) = |x|$ нөлде минимумға ие, алайда екіжақты туындысы жоқ.

Шеткі нүкте

$f(x) = x$ функциясы [0,1]-де ең кіші мәнін 0-де қабылдайды. Оң жақ туындысы 1-ге тең.

Ролль теоремасы

a<b болсын. f функциясы [a,b]-де үзіліссіз, (a,b)-де дифференциалданатын және f(a)=f(b) болсын.

$$\exists c \in (a,b): \qquad f'(c) = 0$$

Бірдей биіктіктегі екі шеткі нүктенің арасында кемінде бір көлденең жанама бар.

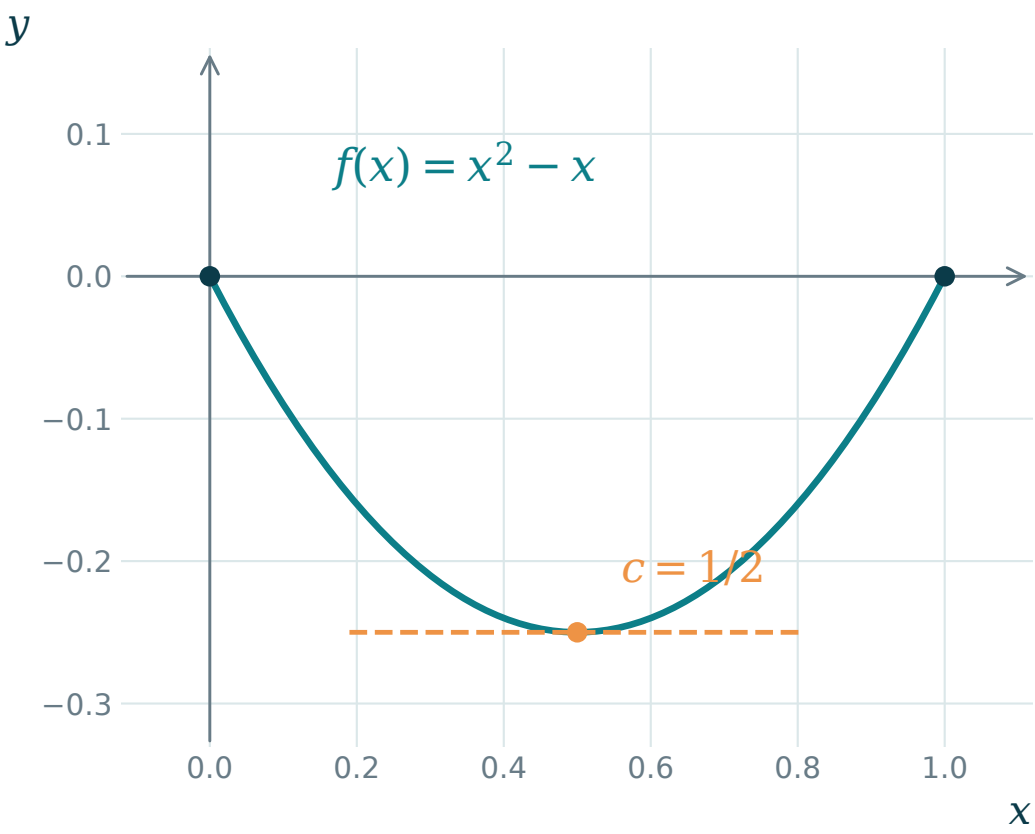
с нүктесінің жалғыз болуы талап етілмейді.

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы

$$f(x) = x^2 - x, \quad [a, b] = [0, 1]$$

f(0)=f(1)=0. Туындысы $f'(x) = 2x - 1$.

$c = 1/2$ кезінде туынды нөлге тең. Жанама $y = -1/4$ көлденең түзу болады.



Ролль теоремасының дәлелі

Вейерштрасс теоремасы бойынша функция кесіндіде ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдайды.

Функция тұрақты болса

Ішкі нүктелердің барлығында туынды нөлге тең. Кез келген с нүктесі жарайды.

Функция тұрақты болмаса

f(a)=f(b) болғандықтан, экстремумдардың кемінде бірі ішкі нүктеде қабылданады.

Ішкі экстремум нүктесіне Ферма теоремасын қолданамыз. Сол нүктеде туынды нөлге тең.

Ролль теоремасының шарттары не үшін керек?

Дифференциалдану	$\lvert x\rvert$ функциясының [−1,1]-дегі шеткі мәндері тең, бірақ ішкі нүктелерде туындысы нөлге тең болмайды.
Үзіліссіздік	[0,1]-де f(x)=x (x<1), f(1)=0 болсын. Шеткі мәндері тең, ал (0,1)-де туындысы 1.
Шеткі мәндердің теңдігі	$f(x) = x$ функциясы [0,1]-де үзіліссіз әрі дифференциалданады, бірақ оның туындысы нөл болмайды.

Лагранждың орта мән теоремасы

f функциясы [a,b]-де үзіліссіз және (a,b)-де дифференциалданатын болсын, a<b.

$$\exists c \in (a,b): \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Кемінде бір ішкі нүктедегі лездік өзгеру жылдамдығы кесіндідегі орташа өзгеру жылдамдығына тең.

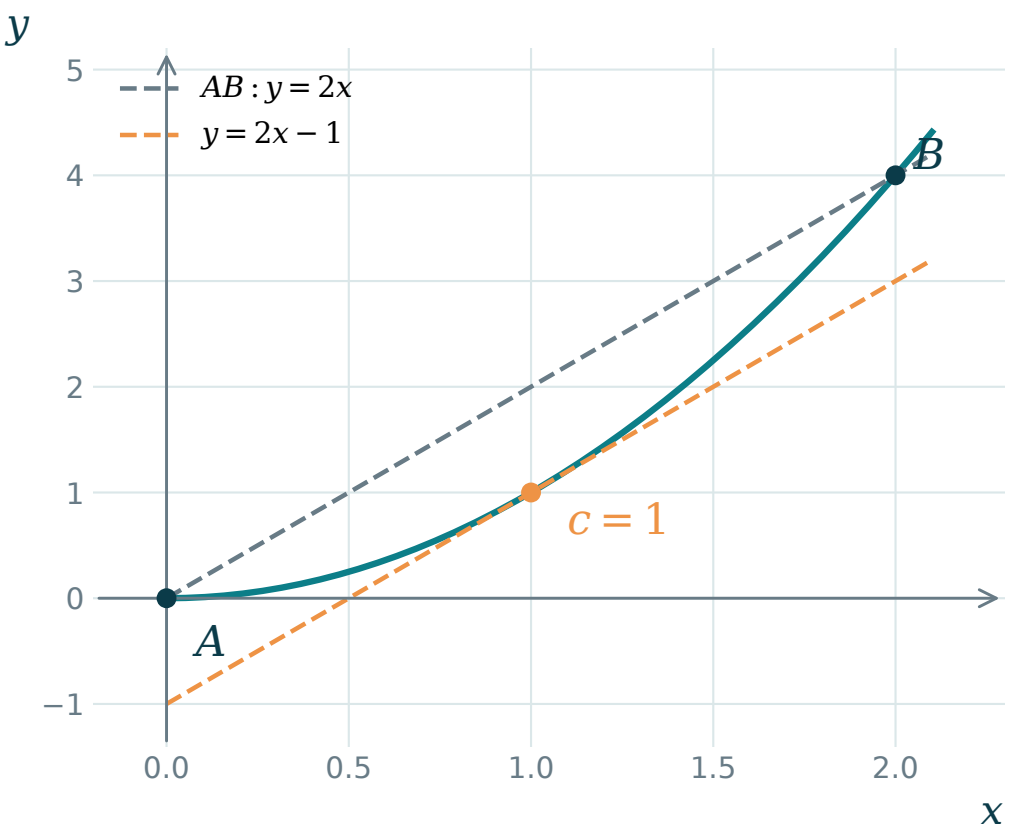
Ролль теоремасы f(a)=f(b) болатын дербес жағдай ретінде шығады.

Қиюшыға параллель жанама

$$f(x) = x^2, \qquad [a, b] = [0, 2]$$

Қиюшының бұрыштық коэффициенті (4−0)/(2−0)=2 болады.

$f'(c) = 2c = 2$ теңдігінен c=1. Осы нүктедегі жанама қиюшыға параллель.



Лагранж теоремасының дәлелі

Функциядан шеткі нүктелер арқылы өтетін түзуді алып тастаймыз:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

F(a)=F(b)=0. F функциясы үшін Ролль теоремасының барлық шарты орындалады. Сондықтан кейбір c үшін:

$$0 = F^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Лагранж теоремасын қолдану мысалы

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad [a, b] = [1, 4]$$

Функция кесіндіде үзіліссіз, ал оның ішкі нүктелерінде дифференциалданады.

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}, \qquad f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{9}{4} \in (1, 4)$$

Туындысы нөл болатын функция

f функциясы I аралығында үзіліссіз және барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болсын.

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \text{const}$$

Кез келген $x_1 < x_2$ үшін Лагранж теоремасы $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$ теңдігін береді.

Тұжырым бір аралықта қолданылады. Үзіліп тұрған облыстың бөліктерінде тұрақтылар әртүрлі болуы мүмкін.

Туынды арқылы өсімшені бағалау

f функциясы [a,b]-де үзіліссіз, (a,b)-де дифференциалдансын. Барлық ішкі нүктелерде $|f'(x)| \leq M$ болсын.

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Дәлел: Лагранж теоремасындағы теңдіктің екі жағынан модуль аламыз.

Туынды бүкіл аралықта бір тұрақтымен шенелсе, сол аралықта Липшиц шарты орындалады.

Синус айырмасын бағалау

x<y болсын. Синус функциясына [x,y] кесіндісінде Лагранж теоремасын қолданамыз:

$$\sin y - \sin x = \cos c\,(y - x), \qquad c \in (x, y)$$

$$|\sin y - \sin x| \le |y - x|$$

Бағалау x>y және x=y жағдайларында да дұрыс. Ол синустың бірқалыпты үзіліссіздігін береді.

Кошидің орта мән теоремасы

f және g функциялары [a,b]-де үзіліссіз, (a,b)-де дифференциалданатын болсын.

$$[f(b)-f(a)]g^{'}(c)=[g(b)-g(a)]f^{'}(c)$$

Теңдік кемінде бір $c \in (a,b)$ нүктесінде орындалады. Бұл түрде туындыларға бөлу жүргізілмейді.

g(x)=x деп алғанда Лагранж теоремасы шығады.

Коши теоремасының қатынас түрі

Алдыңғы шарттарға қоса, (a,b)-де $g^{'}(x) \neq 0$ болсын. Ролль теоремасынан g(b)≠g(a) шығады.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}, \qquad c \in (a,b)$$

Екі функцияның өсімшелері бір ішкі нүктедегі туындыларының қатынасымен байланысады.

Бұл қатынас Лопиталь ережесінің негізін құрайды.

Коши теоремасының дәлелі

Шеткі мәндері нөлге тең көмекші функция құрамыз:

$$H(x) = [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)]\,[f(x) - f(a)]$$

H(a)=H(b)=0. Ролль теоремасы бойынша кейбір $c \in (a, b)$ үшін H′(c)=0.

$$[f(b) - f(a)]g^{'}(c) - [g(b) - g(a)]f^{'}(c) = 0$$

Коши теоремасына мысал

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^3, \qquad [a, b] = [1, 2]$$

Екі функция да шарттарды қанағаттандырады; $g'(x) = 3x^2 > 0$.

$$\frac{4-1}{8-1} = \frac{3}{7} = \frac{2c}{3c^2} = \frac{2}{3c}$$

$$c = \frac{14}{9} \in (1, 2)$$

Лопиталь ережесіне дейінгі тексеру

Шекті тікелей қою	Алым мен бөлімнің шектерін жеке табамыз. Бөлімнің шегі нөлден өзге болса, шектердің бөліндісін аламыз.
Анықталмағандық	0/0 немесе шексіздік/шексіздік түрі шыққанда ғана бөліндіге арналған ережені қарастырамыз.
Қарапайым түрлендіру	Көбейткіштерге жіктеу, қысқарту немесе түйіндес өрнекке көбейту жеткілікті болуы мүмкін.

Лопиталь ережесі: 0/0 түрі

$x \to a + 0$ болсын. f және g функциялары (a,a+δ)-да дифференциалдансын; $g(x) \neq 0$, $g^{'}(x) \neq 0$.

$$f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0, \quad \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \to L$$

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

L ақырлы сан не $\pm\infty$ болуы мүмкін. Сол жақтан және шексіздіктегі шектер үшін де тиісті нұсқалары бар.

0/0 ережесінің дәлел идеясы

a ақырлы және L нақты сан болсын. f(a)=g(a)=0 деп үзіліссіз жалғастырамыз. [a,x]-ке Коши теоремасын қолданамыз:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}, \qquad a < c_x < x$$

x нүктесі a-ға оң жақтан ұмтылғанда c_x те a-ға ұмтылады. Туындылар қатынасының шегі L болғандықтан, бастапқы қатынас та L-ге ұмтылады.

Екіжақты шек үшін сол және оң жақтағы шарттар жеке тексеріледі.

Лопиталь ережесі: шексіздік/шексіздік

Шек қарастырылатын біржақты аралықта f, g дифференциалдансын; $g, g^{'} \neq 0$. Екі функцияның да модульдері шексіздікке ұмтылсын.

$$|f(x)| \to \infty, \quad |g(x)| \to \infty, \quad \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \to L$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L$$

Мұнда $x \to a \pm 0$ немесе $x \to \pm\infty$; L ақырлы сан не $\pm\infty$ болуы мүмкін.

Ережені екі рет қолдану

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

Алдымен 0/0 түрі шығады. Туындылар қатынасы да 0/0 түрін береді:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Екінші қатынастың шегі бар болғандықтан, ереже алдымен оған, содан кейін бастапқы қатынасқа қолданылады.

Логарифмнің өсуін салыстыру

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Алым да, бөлім де оң шексіздікке ұмтылады. Туындылар қатынасын қарастырамыз:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Демек, ln x / x нөлге ұмтылады: логарифм x-тен баяу өседі.

Туындылар қатынасының шегі болмағанда

$$f(x) = x + \sin x, \qquad g(x) = x, \qquad x \to +\infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\sin x}{x} \to 1$$

Бірақ $f'(x)/g'(x) = 1 + \cos x$ шекке ие емес. Бұл бастапқы шектің жоқ екенін білдірмейді.

Лопиталь ережесінің шарттары жеткілікті; олар барлық есеп үшін қажетті емес.

Нөл мен шексіздіктің көбейтіндісі

$x \to 0+0$ кезінде $x \ln x$ өрнегі $0\cdot(-\infty)$ түрін береді. Оны бөліндіге айналдырамыз:

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x}, \qquad \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x$$

$$\lim_{x \to 0+0} x \ln x = 0$$

Көбейтіндінің туындысын алу бастапқы шекті есептеу ережесі болып табылмайды.

Шексіздіктер айырмасын түрлендіру

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

Тікелей айырма $\infty-\infty$ түрін береді. Түйіндес өрнекке көбейтеміз:

$$\sqrt{x^2+x}-x=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1}$$

Соңғы өрнектің шегі 1/2-ге тең. Мұнда алгебралық түрлендірудің өзі жеткілікті.

Дәрежелік анықталмағандықтар

$y = f(x)^{g(x)}$, f(x)>0 болсын. 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} түрлерін логарифмдейміз:

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

Оң жақтағы өрнектің шегі A болса, экспонентаның үзіліссіздігінен $y \to e^{A}$ шығады.

A=−∞ кезінде y→0, A=+∞ кезінде y→+∞. Оң негіз шарты міндетті түрде тексеріледі.

Бірдің шексіз дәрежесі түрі

$$y = (1+x)^{1/x}, \qquad x \to 0, \quad x > -1, \quad x \neq 0$$

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x} \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

Бұл есеп екінші тамаша шекпен де тікелей шешіледі.

Нөлдің нөл дәрежесі түрі

$$y = x^x, \qquad x \to 0 + 0$$

Логарифмдегеннен кейін алдыңғы көбейтінді шығады:

$$\ln y = x \ln x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0+0} x^x = e^0 = 1$$

Анықталмағандықты ашу жоспары

0/0 және ∞/∞	Қарапайым түрлендіруді не шарттары орындалатын Лопиталь ережесін қолдану.
0·∞ және ∞−∞	Көбейтіндіні бөліндіге айналдыру; айырманы ортақ бөлімге келтіру не түйіндес өрнекке көбейту.
Дәрежелік түрлер	Негіздің оңдығын тексеріп, логарифм арқылы көбейтінді шегіне көшу.
Қорытынды	Логарифм қолданылса, бастапқы өрнекке экспонента арқылы оралу.

Жиі кездесетін қателер

Шарттарды өткізіп кету	Ереже кез келген бөліндіге қолданылмайды. Алдымен анықталмағандықтың түрі тексеріледі.
Бөліндіні туындылату	Ережеде $(f/g)'$ емес, f'/g' қатынасы қарастырылады.
Қайталап қолдану	Әрбір келесі қадамда жаңа қатынас үшін де ереженің шарттары тексеріледі.
Кері қорытынды	Туындылар қатынасының шегі жоқ болса, бастапқы қатынас туралы автоматты қорытынды жасалмайды.

Өзіндік жұмыс

1. $f(x) = x^2 - 4x$ үшін [0,4]-те Ролль теоремасындағы c нүктесін табыңыз.

2. $f(x) = \ln x$ үшін [1,e]-де Лагранж теоремасындағы c нүктесін табыңыз.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ шегін есептеңіз.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$ шегін есептеңіз.

5. $\lim\limits_{x \to 0+0} x^{\sin x}$ шегін есептеңіз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $f'(c) = 2c - 4 = 0$, сондықтан c=2.

2. $1/c = 1/(e-1)$, сондықтан $c = e - 1 \in (1, e)$.

3. Ережені үш рет қолданамыз: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\cos x}{6} = -1/6$.

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

5. $\sin x \ln x = (\sin x / x)\,(x \ln x) \to 0$. Жауабы: $e^0 = 1$.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Ферма теоремасында ішкі нүкте мен туындының бар болуы не үшін қажет?
2. Ролль және Лагранж теоремаларының шарттары қалай ерекшеленеді?
3. Туындының шенелуі функция өсімшесін қалай бағалайды?
4. Коши теоремасын қатынас түрінде жазу үшін қандай қосымша шарт керек?
5. Лопиталь ережесі қандай анықталмағандықтарға тікелей қолданылады?
6. Дәрежелік анықталмағандықты логарифмдегеннен кейін не істеу керек?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.