Математикалық талдау 1

9-дәріс

Дөңестік, асимптоталар және функция графигі

Иілу нүктелері және шексіздіктегі мінез
Функцияны толық зерттеу мысалдары

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Үзіліссіздік және дифференциалдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: дөңестік пен иілу нүктелерін анықтау, асимптоталарды табу және функция графигін толық зерттеу.

Екінші туындыны қолдану

Дөңес және ойыс функциялар.
Иілу нүктелері мен кандидаттар.
Қажетті және жеткілікті шарттар.

Графикті толық зерттеу

Тік, көлденең, көлбеу асимптоталар.
Зерттеудің жүйелі жоспары.
Көпмүше, бөлшек және логарифм.

График аналитикалық қорытындыларды көрсетеді; негізгі тұжырымдар туынды мен шек арқылы дәлелденеді.

Дөңес функция: хорда арқылы анықтама

I аралығындағы кез келген x_1, x_2 және $0 \le t \le 1$ үшін төмендегі теңсіздік орындалсын:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Графиктің екі нүктесінің арасындағы бөлігі сол нүктелерді қосатын хордадан жоғары жатпайды.

Осы дәрісте «дөңес» термині дәл осы теңсіздікпен анықталады. Мысал: f(x)=x².

Ойыс функция және қатаң дөңестік

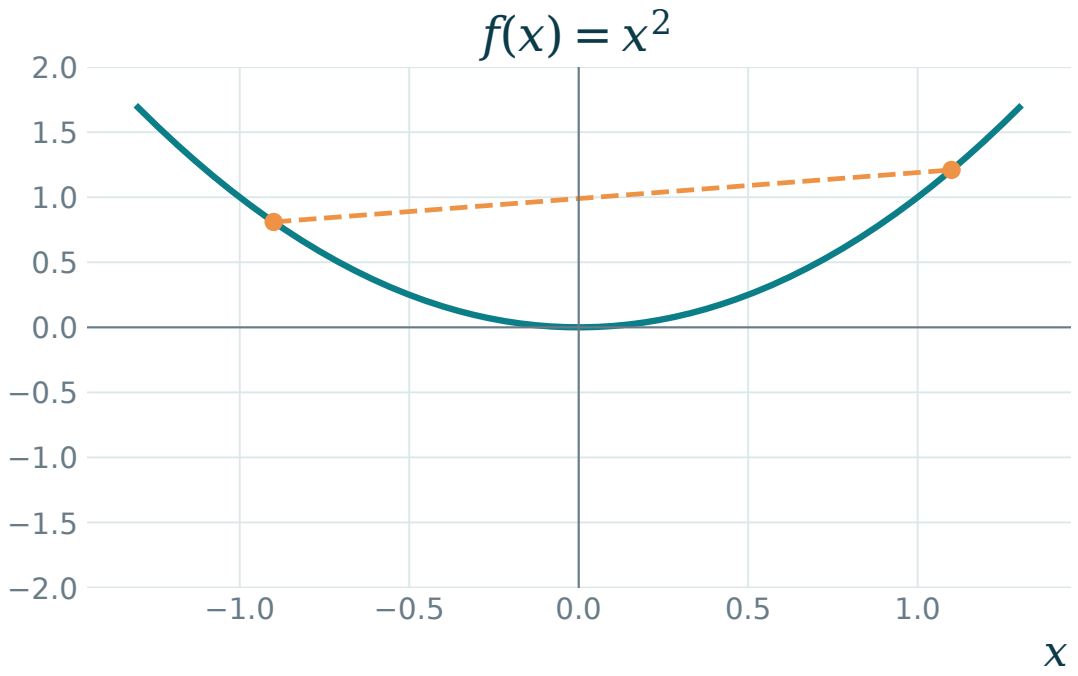
Ойыс функция үшін хордаға қатысты теңсіздік кері бағытта орындалады:

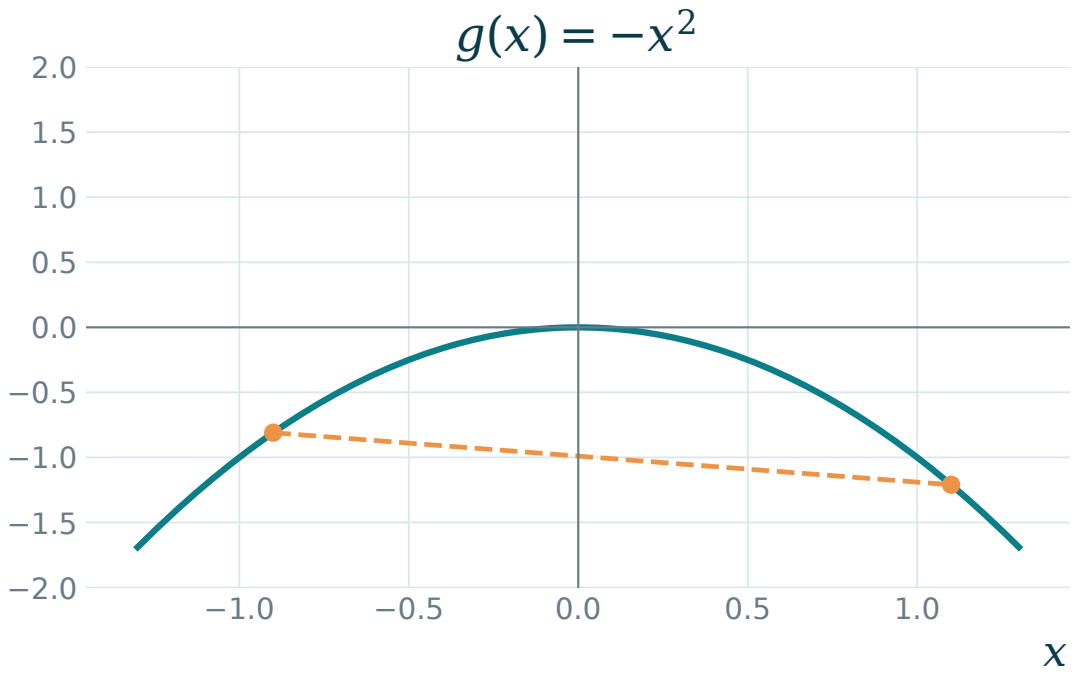
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

График хордадан төмен жатпайды. Мысал: $f(x) = -x^2$.

$x_1 \neq x_2$, 0<t<1 кезінде теңсіздік қатаң болса, функция қатаң дөңес немесе қатаң ойыс деп аталады.

Дөңес және ойыс графиктерді салыстыру





Сол жақта график хордадан төмен, оң жақта жоғары орналасқан. Үзік сызықтар екі нүктені қосатын хордаларды көрсетеді.

Жанама арқылы сипаттау

Дифференциалданатын дөңес функцияның графигі кез келген жанамасынан төмен жатпайды:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \qquad x, a \in I$$

Ойыс функцияда график жанамадан жоғары жатпайды және теңсіздік бағыты өзгереді.

Хорда мен жанаманы шатастырмаймыз: дөңес график хордадан төмен, жанамадан жоғары жатады.

Екінші туынды бойынша дөңестік белгісі

f функциясы I ашық аралығында екі рет дифференциалданатын болсын.

$$f''(x) \geq 0 \ \ (x \in I) \implies f \text{ дөңес},$$

$$f''(x) \leq 0 \ \ (x \in I) \implies f \text{ ойыс}.$$

Екінші туынды қатаң оң болса, функция қатаң дөңес; қатаң теріс болса, қатаң ойыс болады.

Дөңестік белгісінің дәлел идеясы

$f'' \geq 0$ болса, алдыңғы дәрістің теоремасы бойынша f' кемімейді. $x_1 < z < x_2$ болсын.

$$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}$$

Мұнда $x_1 < c_1 < z < c_2 < x_2$. Бөлімдер оң болғандықтан, теңсіздікті түрлендірсек, хорда арқылы анықтаманы аламыз.

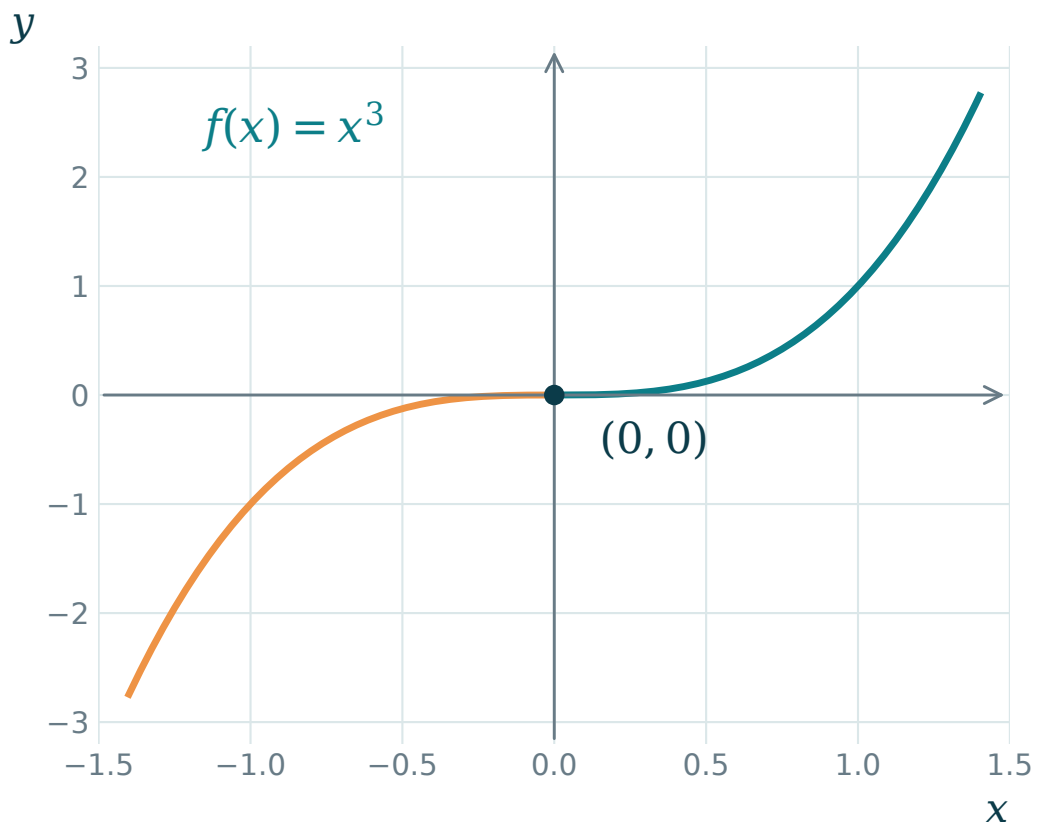
Дәлел Лагранж теоремасы мен бірінші туындының монотондығына сүйенеді.

Кубтық функцияның дөңестігі

$$f(x) = x^3, \qquad f''(x) = 6x$$

x<0 кезінде екінші туынды теріс: функция ойыс. x>0 кезінде екінші туынды оң: функция дөңес.

Нөлден өткенде дөңестік түрі өзгереді. Бұл иілу нүктесіне мысал болады.



Иілу нүктесі

f функциясы c нүктесінде үзіліссіз болсын. c-нің екі жағындағы маңайларда дөңестіктің түрі ауысса, (c,f(c)) иілу нүктесі деп аталады.

ойыс $\longleftrightarrow$ дөңес

Екінші туындының таңбасы c арқылы өткенде қатаң өзгерсе және үзіліссіздік орындалса, иілу нүктесі бар.

Иілу нүктесі тек x=c саны емес, графиктегі (c,f(c)) нүктесі ретінде жазылады.

Иілу нүктесіне кандидаттар

Екінші туынды нөл	$f''(c) = 0$ теңдеуінің түбірлері тексеріледі. Бұл теңдік өздігінен жеткіліксіз.
Екінші туынды жоқ	f(c) анықталған және f c-де үзіліссіз болса, екінші туынды жоқ нүктелер де тексеріледі.
Облысқа кірмейді	Функция анықталмаған нүктеде графиктің иілу нүктесі болмайды.
Негізгі тексеру	Нүктенің екі жағындағы дөңестік түрі салыстырылады; тек теңдеуді шешумен шектелмейміз.

Екінші туындының нөлі жеткіліксіз

$$f(x) = x^4, \qquad f''(x) = 12x^2, \qquad f''(0) = 0$$

Нөлдің сол жағында да, оң жағында да екінші туынды оң. Функция екі жақта да дөңес болып қалады.

$(0, 0)$ иілу нүктесі емес

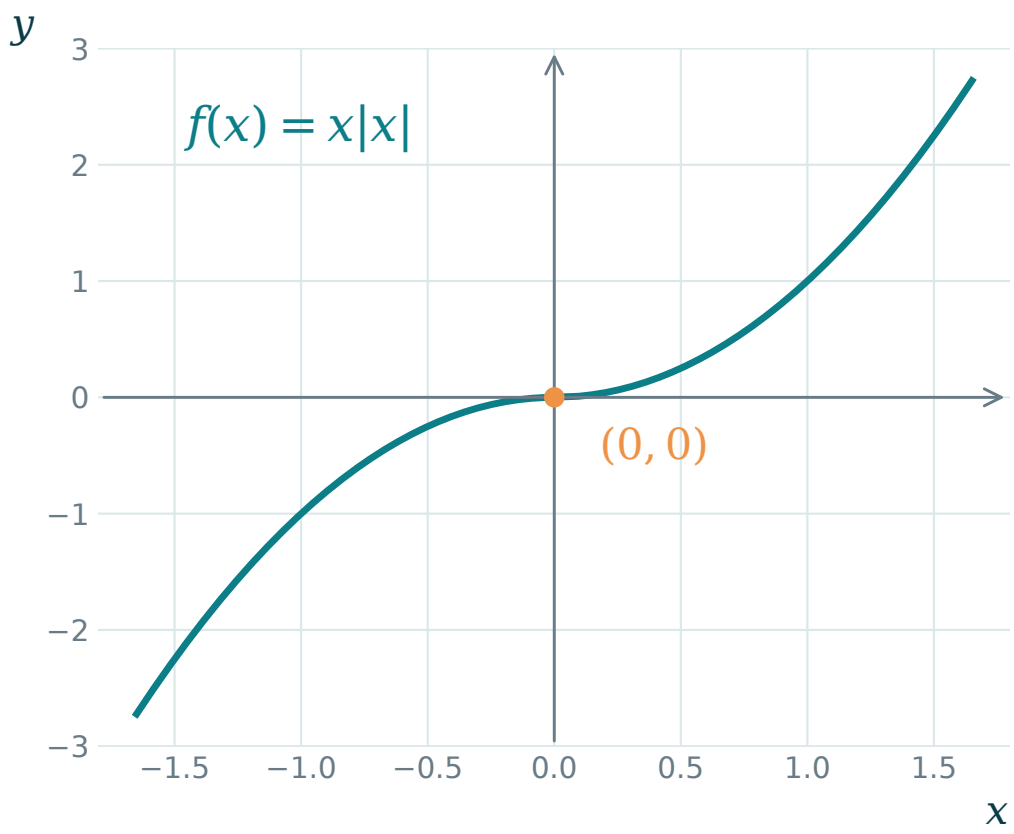
Иілу үшін дөңестіктің ауысуы қажет.

Екінші туынды жоқ нүктедегі иілу

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

f нөлде үзіліссіз, $f'(0) = 0$. Сол жақта $f'' = -2$, оң жақта $f'' = 2$.

$f''(0)$ жоқ, бірақ (0,0) иілу нүктесі болады. Жанама көлденең.



Дөңестік пен иілуді зерттеу реті

1. Екінші туынды — Функцияның облысын ескеріп, екінші туындыны табамыз.
2. Кандидаттар — Екінші туындының нөлдері мен жоқ болатын нүктелерін белгілейміз.
3. Таңба кестесі — Әр аралықтағы екінші туындының таңбасы бойынша дөңес және ойыс бөліктерді анықтаймыз.
4. Нүктелер — Облысқа кіретін, үзіліссіз және дөңестік түрі ауысатын нүктелер үшін f(c)-ні есептейміз.

Облыстағы үзіліс иілу нүктесі болмайды

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0, \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

x<0 кезінде функция ойыс, x>0 кезінде дөңес. Алайда x=0 анықталу облысына кірмейді.

$x = 0$ иілу нүктесі емес

Дөңестік аралықтарының арасында графиктің үздіксіз нүктесі болуы керек.

Асимптоталардың түрлері

Тік асимптота	$x=a$ түзуі. a-ға кемінде бір жағынан жақындағанда функция модулі шексіз өседі.
Көлденең асимптота	$y=b$ түзуі. x оң не теріс шексіздікке ұмтылғанда функция b санына ұмтылады.
Көлбеу асимптота	$y=kx+b$, $k\neq 0$ түзуі. Тиісті шексіздікте $f(x)-(kx+b)$ нөлге ұмтылады.

Тік асимптотаға жеткілікті шарт

Төмендегі біржақты шектердің кемінде бірі шексіз болса, x=a түзуі тік асимптота болады:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{немесе} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$$

Екі жақтағы шектердің бірдей болуы талап етілмейді. Функция тек бір жақта анықталуы да мүмкін.

Мысалы, $1/(x-1)$ үшін x=1; $\ln x$ үшін x=0 тік асимптота болады.

Анықталмаған нүкте әрдайым асимптота емес

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1)$$

x=1-де функция анықталмағанымен, сол және оң жақтағы шектердің екеуі де 2-ге тең.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ тік асимптота емес}$$

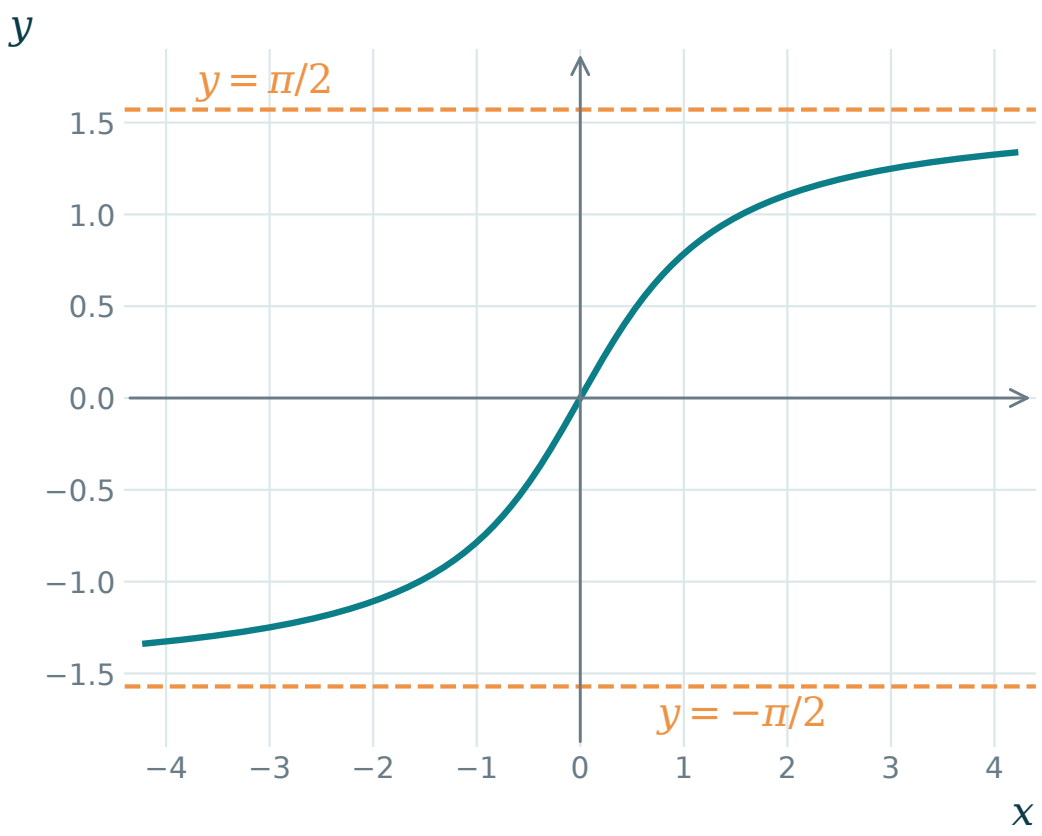
Бұл жерде жойылатын үзіліс бар. Бөлімнің нөлдерін тапқаннан кейін шектерді тексереміз.

Көлденең асимптоталар

$$f(x) = \arctan x$$

$x \to +\infty$ кезінде f(x)→π/2. Оң жақтағы асимптота: y=π/2.

$x \to -\infty$ кезінде f(x)→−π/2. Сол жақтағы асимптота: y=−π/2.



Көлбеу асимптотаның коэффициенттері

$x \to +\infty$ кезінде $y=kx+b$ асимптотасын іздейік. Екі шек те ақырлы болуы керек:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} \bigl(f(x) - kx\bigr)$$

$k \neq 0$ болса, асимптота көлбеу; $k=0$ болса, көлденең. Теріс шексіздік үшін есептеу жеке жүргізіледі.

k шегінің бар болуының өзі жеткіліксіз: b шегін де табу қажет.

Асимптота формулаларының негіздемесі

$f(x) = kx + b + r(x)$, $r(x) \to 0$ болсын. Екі жағын x-ке бөлеміз:

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{r(x)}{x} \to k$$

Ал f(x)−kx=b+r(x) өрнегінің шегі b-ге тең. Керісінше, осы екі ақырлы шек табылса, анықтама бойынша асимптота шығады.

Бұл формулалар әрбір шексіз бағыт үшін дербес қолданылады.

Рационал функцияның асимптоталары

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

$x \to 1-0$ кезінде $f \to -\infty$, $x \to 1+0$ кезінде $f \to +\infty$. Тік асимптота: $x=1$.

$$f(x) - (x+1) = \frac{2}{x-1} \to 0 \quad (x \to \pm\infty)$$

Екі шексіз бағыттағы көлбеу асимптота: $y=x+1$.

Асимптоталар туралы екі ескерту

Қиылысуға болады

$f(x) = \sin x / x$ үшін x → +∞ кезінде y=0 асимптота. График оны $x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ нүктелерінде қиып өтеді.

Бірінші шек жеткіліксіз

$f(x) = x + \sqrt{x}$, x>0 үшін f(x)/x → 1. Бірақ f(x)−x=√x → +∞, сондықтан көлбеу асимптота жоқ.

Бар болуы міндетті емес

$f(x) = x^2$ үшін f(x)/x=x шегі ақырлы емес. Шексіздікте көлденең де, көлбеу де асимптота жоқ.

Функцияны толық зерттеу жоспары

1. Бастапқы қасиеттер — Анықталу облысы, үзіліссіздік, симметрия, осьтермен қиылысу және таңба.
2. Шектер — Облыс шекараларындағы біржақты шектер, шексіздіктегі мінез және асимптоталар.
3. Екі туынды — Бірінші туындыдан монотондық пен экстремумдар; екінші туындыдан дөңестік пен иілу.
4. График — Мәндер мен аралықтарды кестеге біріктіріп, асимптоталар және ерекше нүктелер арқылы график салу.

1-мысал: көпмүшенің бастапқы қасиеттері

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$$

Анықталу облысы: барлық нақты сандар. Функция барлық жерде үзіліссіз. Нөлдері: x=0 және x=3.

x<3 кезінде f(x)≤0, теңдік тек x=0-де; x>3 кезінде f(x)>0. x=3-те де функция нөлге тең.

Теріс шексіздікте f→−∞, оң шексіздікте f→+∞. Сызықтық асимптоталар жоқ.

1-мысал: монотондық және экстремумдар

$$f'(x) = 3x(x-2)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Жергілікті максимум: f(0)=0. Жергілікті минимум: f(2)=−4. Бүкіл нақты осьте абсолют экстремум жоқ.

1-мысал: дөңестік және иілу

$$f''(x) = 6(x-1)$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f''	$-$	0	$+$
түрі	ойыс		дөңес

x=1-де функция үзіліссіз және дөңестік түрі ауысады. f(1)=−2, сондықтан иілу нүктесі (1,−2).

1-мысал: нәтижелерді біріктіру

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$

x=0 және x=2 экстремумдарды бөледі; x=1 дөңестікті бөледі. Әр ерекше нүктенің қызметі кестеде жеке көрінеді.

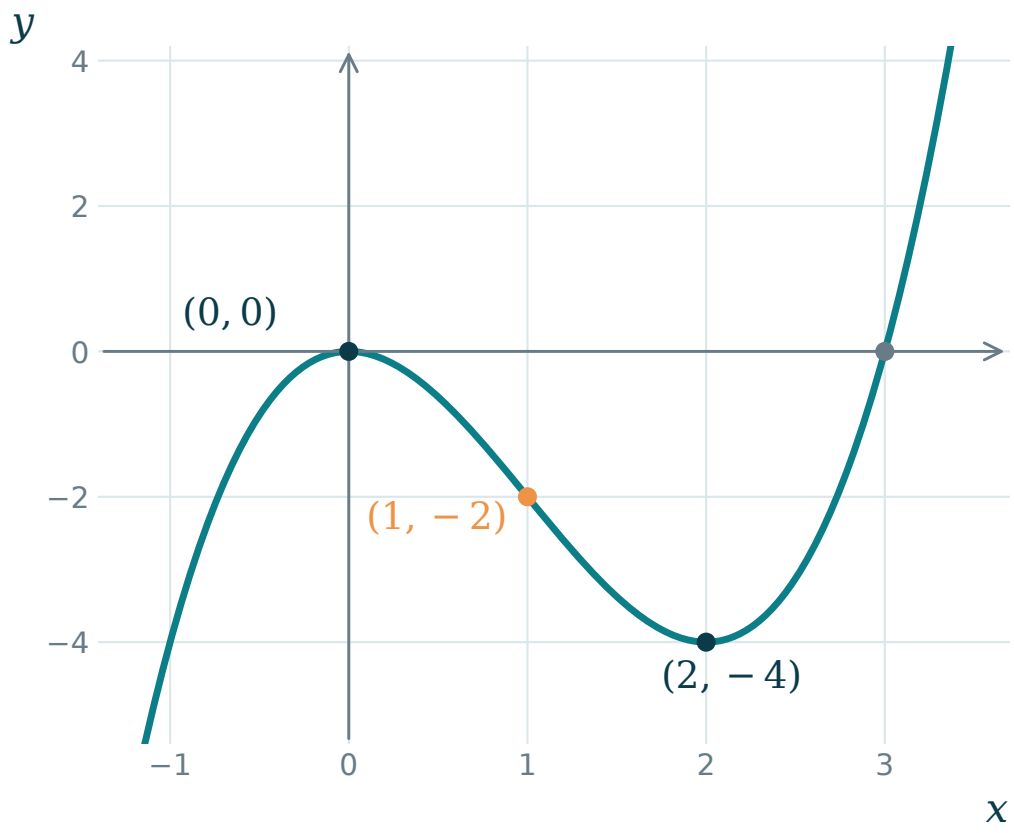
Нөлдер, экстремумдар және иілу нүктесі графиктің негізгі тірек нүктелерін береді.

1-мысал: толық график

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Максимум: (0,0). Минимум: (2,−4). Иілу нүктесі: (1,−2). Осьпен екінші қиылысу: (3,0).

Графиктің әр бөлігі бірінші және екінші туындылардың таңбаларына сәйкес салынады.



2-мысал: рационал функцияның облысы

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Анықталу облысы: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Осы аралықтардың әрқайсысында функция үзіліссіз. Осьтермен қиылысуы: (0,0).

x<1, x≠0 үшін функция теріс, x=0-де нөл, x>1 үшін оң. x=1 графикке кірмейді.

Облыстағы үзіліс таңба кестелерінің барлығында сақталады.

2-мысал: шектер және асимптоталар

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$$

Тік асимптота: x=1. Шексіздіктегі асимптотаны бөліндіге жіктеу арқылы табамыз:

$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x-1} \to 0 \quad (x \to \pm\infty)$$

Екі бағыттағы көлбеу асимптота: y=x+1.

2-мысал: бірінші туынды

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	жоқ	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$

Жергілікті максимум: f(0)=0. Жергілікті минимум: f(2)=4. x=1-де функция да, экстремум да жоқ.

2-мысал: екінші туынды

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

x<1 аралығы

Екінші туынды теріс. Функция ойыс.

x>1 аралығы

Екінші туынды оң. Функция дөңес.

Екінші туынды таңбасын өзгертетін x=1 нүктесі облысқа кірмейді. Сондықтан графикте иілу нүктесі жоқ.

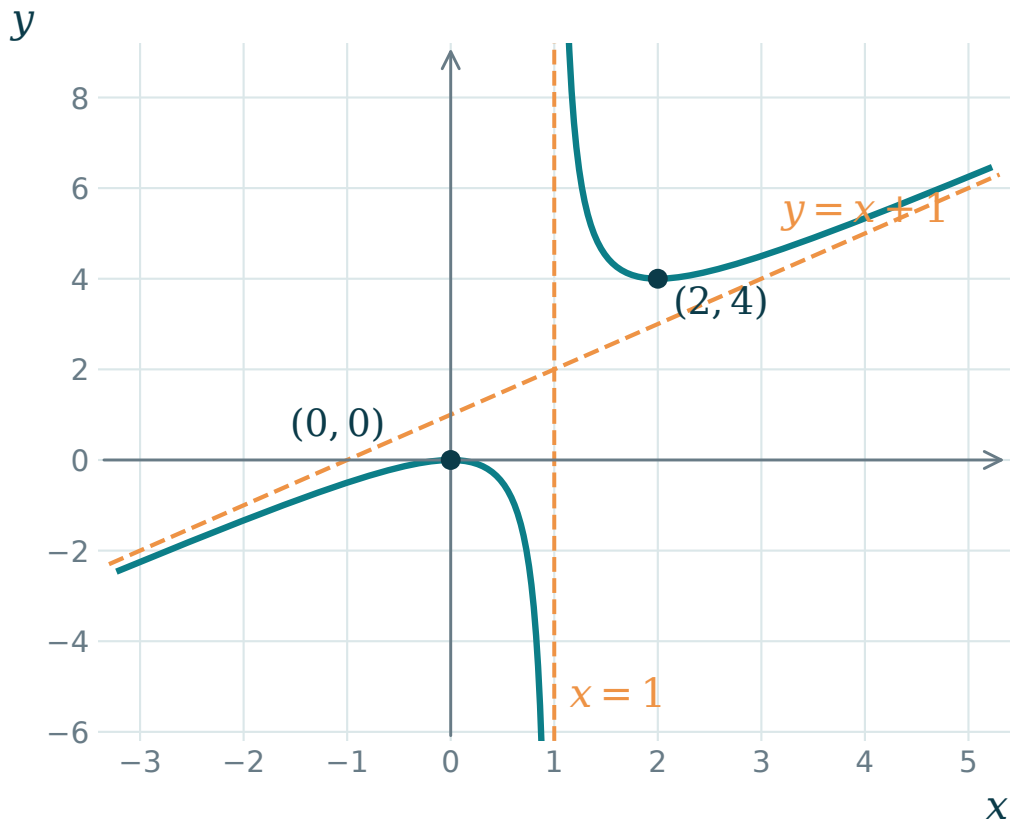
2-мысал: толық график

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Асимптоталар: x=1 және y=x+1.

Экстремумдар: (0,0) және (2,4).

Сол тармақтың барлық мәні 0-ден үлкен емес, оң тармақтың барлық мәні 4-тен кіші емес.



2-мысал: мәндер жиынын негіздеу

Сол тармақ екі шетінде де $-\infty$-ке ұмтылады және $x=0$-де ең үлкен 0 мәнін қабылдайды. Аралық мән теоремасы барлық теріс мәннің қабылдануын береді.

Оң тармақ екі шетінде де $+\infty$-ке ұмтылады және $x=2$-де ең кіші 4 мәнін қабылдайды. 4-тен үлкен барлық мән қабылданады.

$$E(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

3-мысал: логарифмдік функция

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0$$

Функция өз облысында үзіліссіз. Нөлі: x=1. 0<x<1 кезінде теріс, x>1 кезінде оң.

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Тік асимптота: x=0. Оң шексіздіктегі көлденең асимптота: y=0.

3-мысал: екі туынды және ерекше нүктелер

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

Функция (0,e]-де өседі, [e,+∞)-де кемиді. Абсолют максимум: f(e)=1/e.

$(0, e^{3/2})$ аралығында ойыс, $(e^{3/2}, +\infty)$ аралығында дөңес. Иілу нүктесі:

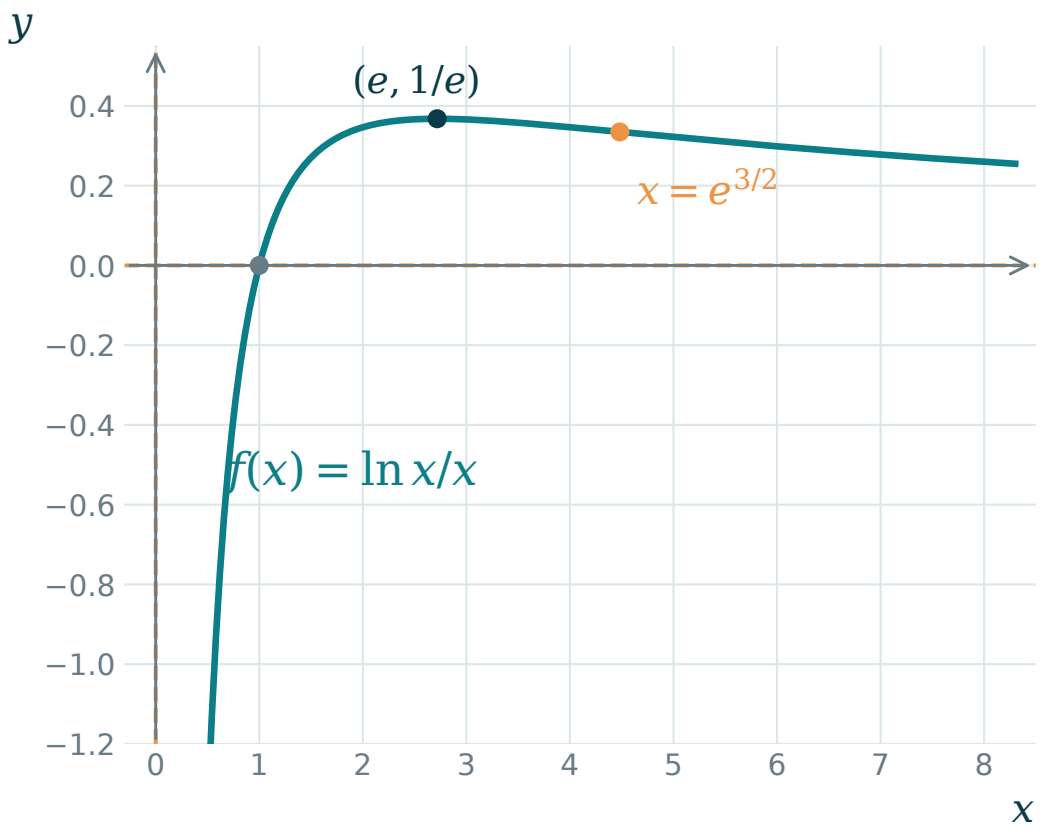
$$\left(e^{3/2}, \frac{3}{2e^{3/2}}\right)$$

3-мысал: толық график

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

x=1-де график көлденең асимптотасын қиып өтеді. Одан кейін максимумға жетіп, нөлге жоғарыдан жақындайды.

Мәндер жиыны: $(-\infty, 1/e]$. Ең кіші мән жоқ.



Экстремум мен иілудің айырмашылығы

Бірінші туынды	Оның таңба ауысуы функцияның өсуінен кемуіне не керісінше ауысуын көрсетеді.
Екінші туынды	Оның таңба ауысуы үзіліссіз нүктеде дөңестік түрінің ауысуын көрсетеді.
Иілу бар, экстремум жоқ	$f(x) = x^3$ нөлде иіледі, бірақ өсуін жалғастырады.
Экстремум бар, иілу жоқ	$f(x) = x^2$ нөлде минимумға ие, ал екі жақта да дөңес.

Жиі кездесетін қателер

Нөлдік екінші туынды	$f''(c)=0$ теңдігінен бірден иілу нүктесі бар деп қорытынды жасауға болмайды.
Облыс пен үзіліс	Облысқа кірмейтін нүкте экстремум да, иілу нүктесі де болмайды.
Асимптота	График асимптотаны қиып өтуі мүмкін. Асимптота туралы қорытынды шек арқылы жасалады.
Суреттің дәлдігі	Суреттің масштабы немесе терезесі қасиеттерді жасыруы мүмкін. Аналитикалық тексеру қажет.

Өзіндік жұмыс

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$ функциясының дөңестік аралықтары мен иілу нүктелерін табыңыз.

2. $f(x) = (2x + 1)/(x - 2)$ функциясының тік және көлденең асимптоталарын табыңыз.

3. $f(x) = x^3 - 6x^2$ функциясының иілу нүктесін табыңыз.

4. $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, x≠2 үшін x=2 тік асимптота бола ма?

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $f'' = 12x^2 - 4$. $|x| > 1/\sqrt{3}$ кезінде дөңес, $|x| < 1/\sqrt{3}$ кезінде ойыс. Иілу нүктелері: $(\pm 1/\sqrt{3}, -5/9)$.

2. $(2x+1)/(x-2) = 2 + 5/(x-2)$. Тік: x=2; көлденең: y=2.

3. $f''(x) = 6x - 12$ таңбасын x=2-де өзгертеді. Иілу нүктесі: (2,−16).

4. Жоқ. x≠2 кезінде f(x)=x+2, сондықтан $x \to 2$ кезіндегі шек 4-ке тең.

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Дөңес және ойыс функция хорда арқылы қалай анықталады?
2. Екінші туынды таңбасы дөңестікпен қалай байланысады?
3. Иілу нүктесі үшін $f''(c)=0$ шарты жеткілікті ме, қажетті ме?
4. Тік асимптотаны анықтағанда қандай біржақты шектер тексеріледі?
5. Көлбеу асимптотаның екі коэффициенті қалай табылады?
6. Функцияны толық зерттеу нәтижелері графикте қалай біріктіріледі?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.