Математикалық талдау 1

15-дәріс

Интегралдың геометриялық қолданылуы

Жазық фигура ауданы. Қисық доғасының ұзындығы
Қималар және айналу денелерінің көлемі

PhD, ассистент-профессор Ерғалиев Мади, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

3-модуль. Интегралдық есептеу

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Мақсаты: геометриялық шаманы шағын үлестер қосындысына келтіріп, аудан, доға ұзындығы және көлемді интегралмен есептеу.

Аудан мен доға

Таңбалы интеграл және аудан.
Екі қисық арасындағы аймақ.
График пен параметрлік қисық.

Көлем

Көлденең қималар.
Диск және сақина әдістері.
Цилиндрлік қабықтар.

Әр есепте алдымен аймақты немесе денені сызамыз, содан кейін ғана формула мен шектерді таңдаймыз.

Геометриялық есепті интегралға келтіру

1. Шекаралар	Аймақты шектейтін қисықтарды, аралықты және айналу осін анықтау.
2. Шағын үлес	Жіңішке жолақ, қысқа кесінді немесе жұқа қиманың шамасын жазу.
3. Қосындыдан шекке	Үлестерді қосып, бөліктер ұсақталғанда анықталған интегралға көшу.
4. Есептеу және мағына	Интегралды есептеп, таңбасын, өлшем бірлігін және геометриялық сәйкестігін тексеру.

Теріс емес график астындағы аудан

f [a,b]-де үзіліссіз және f(x)≥0 болсын. y=0, y=f(x), x=a, x=b сызықтарымен шектелген фигураның ауданы:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Жіңішке тіктөртбұрыштың биіктігі $f(\xi_i)$, ені Δx_i. Олардың аудандарының қосындысы Риман қосындысын береді.

Аудан теріс емес және ұзындық бірлігінің квадратымен өлшенеді.

Таңба өзгергенде аудан қалай табылады?

f графигі мен Ox осі арасындағы геометриялық аудан таңбаларға тәуелсіз оң үлестерден жиналады:

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Функция нөлдерінің көмегімен аралықты бөліп, теріс бөліктерде −f(x) интегралдаймыз.

Жалпы жағдайда $S \neq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

Екі график арасындағы аудан

f және g [a,b]-де үзіліссіз, f(x)≥g(x) болсын. Жолақ биіктігі жоғарғы график пен төменгі графиктің айырмасына тең:

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Қисықтардың өзара орналасуы өзгерсе, қиылысу нүктелерінде интегралды бөліктерге бөлеміз.

Шектер көбіне f(x)=g(x) теңдеуінен табылады.

Екі графикке мысал: y=2x және y=x²

Қиылысу теңдеуі x²=2x, сондықтан x=0 және x=2. Осы аралықта 2x≥x².

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$S = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

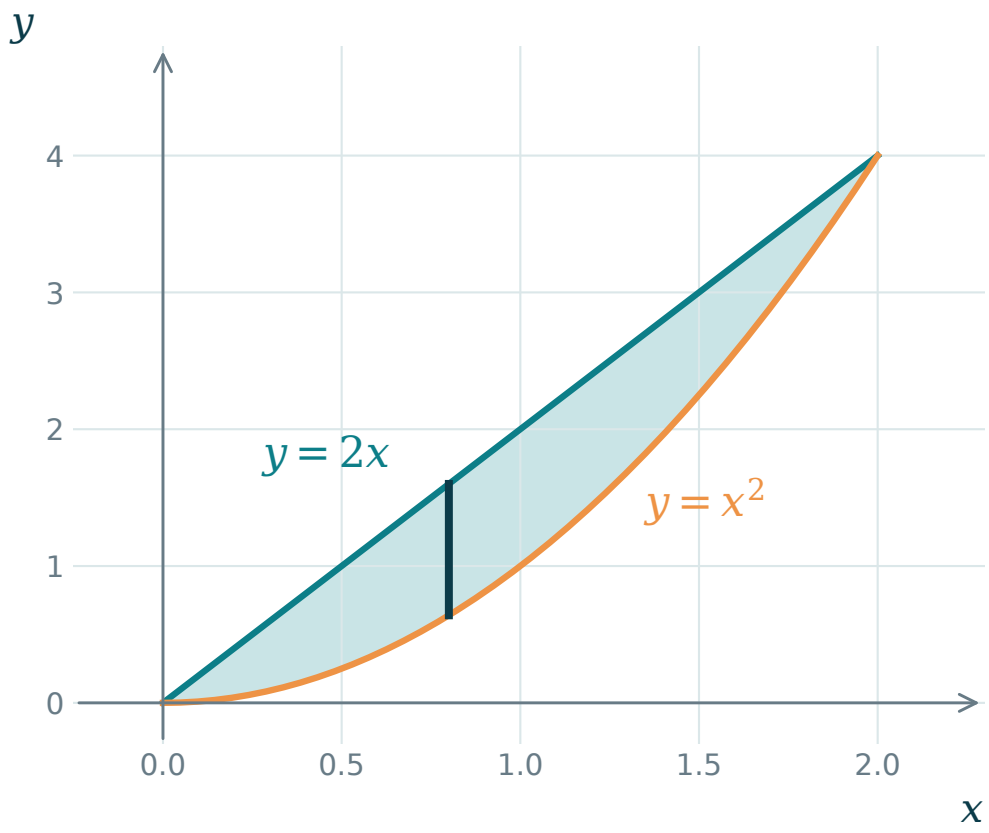
Интеграл астында аудан жолағының биіктігі тұр.

Аудан жолағының геометриясы

$$\Delta S \approx (2x - x^2)\,\Delta x$$

Суреттегі тік кесінді жоғарғы және төменгі графиктердің арасындағы биіктікті көрсетеді.

Бөліктерді ұсақтағанда жолақтар аудандарының қосындысы 4/3-ке ұмтылады.



Көлденең жолақтармен аудан есептеу

Аймақ y=c және y=d арасында сол жақ x=φ(y), оң жақ x=ψ(y) қисықтарымен шектелсін, ψ(y)≥φ(y).

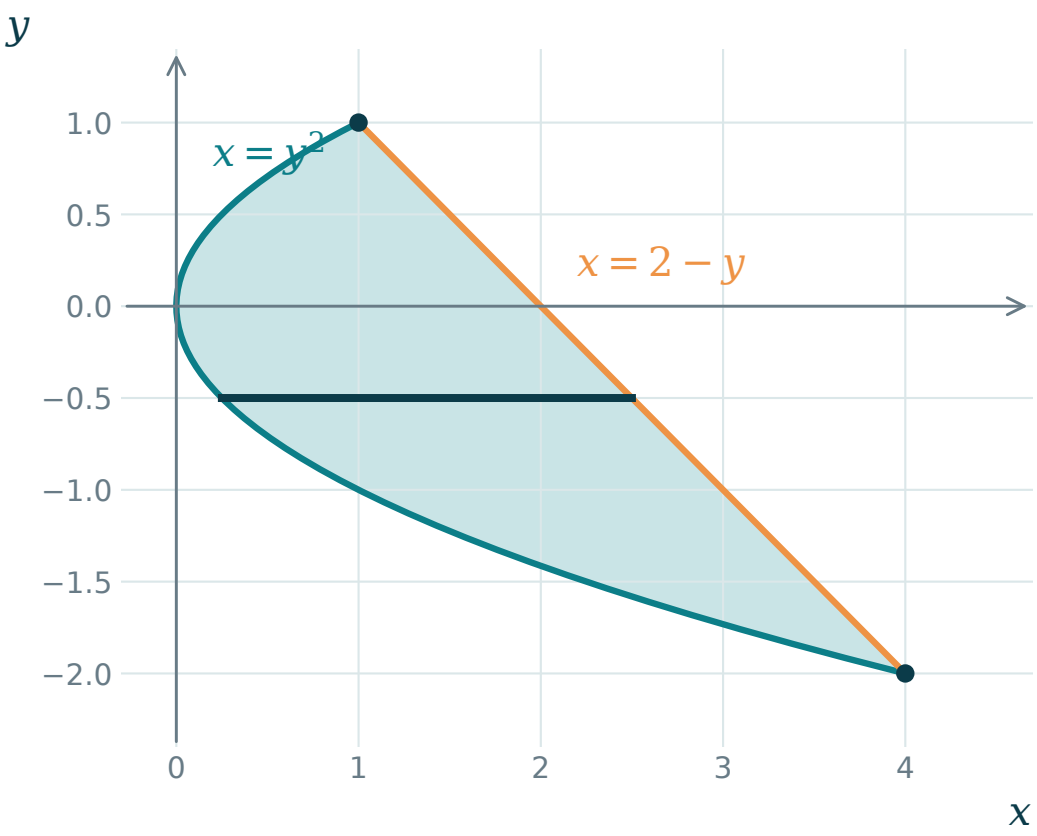
$$S = \int_c^d (\psi(y) - \varphi(y))\, dy$$

Көлденең жолақ ұзындығы оң жақтағы x мәнінен сол жақтағы x мәнін шегерумен табылады.

dy қолданылғанда шектер y координаталары бойынша алынады.

Көлденең жолаққа мысал

$$x = y^2, \qquad x = 2 - y$$

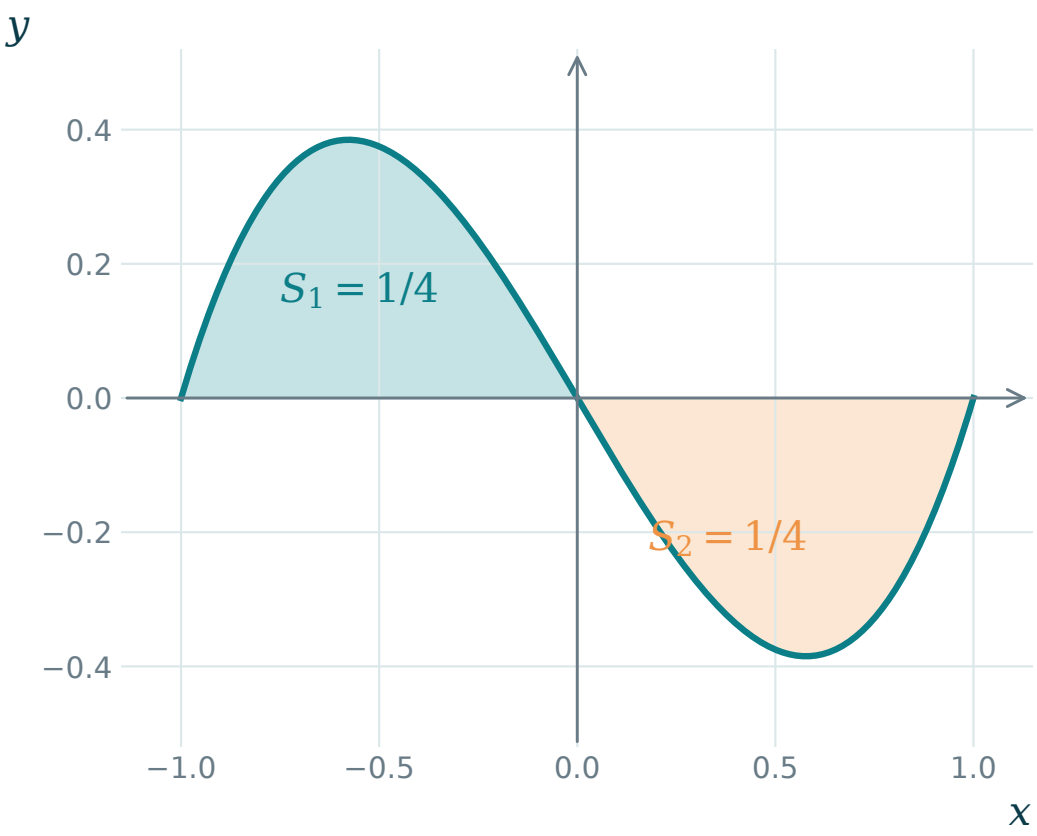


y²=2−y теңдеуінен y=−2 және y=1. Оң жақ шекара 2−y, сол жақ шекара y² болады.

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\, dy = \frac{9}{2}$$

Нөлдік интеграл және оң аудан

$$f(x) = x^3 - x, \qquad x \in [-1, 1]$$



f тақ болғандықтан, оның анықталған интегралы нөл. Бірақ екі бөліктің аудандары 1/4-тен:

$$S = \int_{-1}^{1} |x^3 - x|\, dx = \frac{1}{2}$$

Доға ұзындығы: сынық сызықтан шекке

Қисықты ретімен алынған нүктелер арқылы сынық сызықпен жуықтаймыз. Екі көршілес нүкте арасындағы кесінді ұзындығы:

$$\Delta \ell_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Кесінділерді қосып, бөліктеуді ұсақтаймыз. Ұзындық қисықтың тек шеткі нүктелерінің арақашықтығына тең бола бермейді.

Ұзындық бірлігі аудан не көлем бірлігімен шатастырылмайды.

График доғасының ұзындығы

y=f(x) функциясы [a,b]-де үздіксіз дифференциалданатын болсын. График доғасының ұзындығы:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Формула қисық график түрінде бір рет жүріп өтілгенде қолданылады. Түбір астындағы өрнек әрқашан оң.

f-тің таңбасы доға ұзындығының таңбасын өзгертпейді.

Доға ұзындығы формуласының негіздемесі

Лагранж теоремасынан $\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$. Сондықтан сынық сызықтың ұзындығы:

$$\sum_i \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\,\Delta x_i$$

Бұл үзіліссіз $\sqrt{1+(f')^2}$ функциясының Риман қосындысы. Бөліктер диаметрі нөлге ұмтылғанда қажетті интеграл шығады.

Дәлелдеуде Пифагор теоремасы мен интегралдық қосынды біріктірілді.

Түзу кесіндісі арқылы формуланы тексеру

$$y = 3x + 1, \qquad 0 \le x \le 2, \qquad y' = 3$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + 9}\, dx = 2\sqrt{10}$$

Шеткі нүктелері (0,1) және (2,7). Олардың арақашықтығы $\sqrt{(2^2+6^2)}=2\sqrt{10}$. Екі жол бірдей нәтиже берді.

Қисық графиктің доға ұзындығы

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 3, \qquad y' = \sqrt{x}$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x}\, dx = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\right]_0^3$$

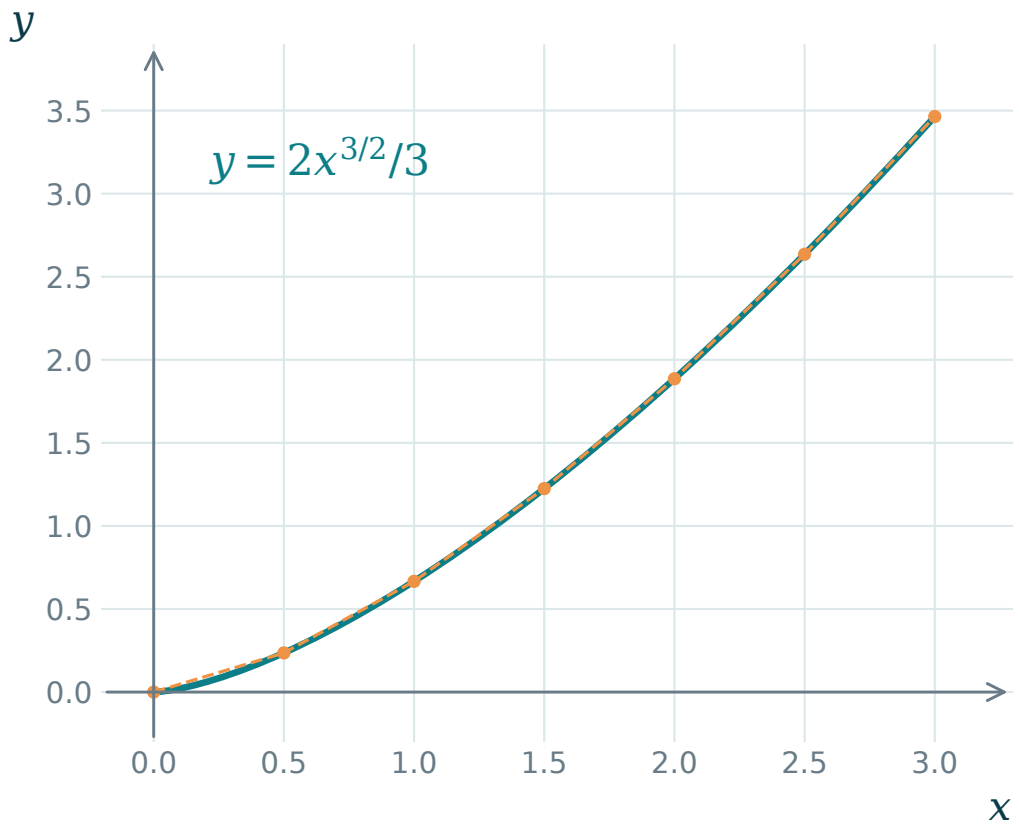
$$L = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}$$

Доға мен сынық сызықты салыстыру

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

Үзік сызық қисыққа жүргізілген сынық сызықты көрсетеді. Нүктелерді жиілету арқылы ұзындық жуықталады.

Дәл мән 14/3; ол интегралды есептеу арқылы алынды.



Логарифмдік графиктің ұзындығы

$$y = \ln(\cos x), \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$

$y' = -\tan x$ және осы аралықта $\sqrt{1+\tan^2 x} = \sec x$.

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec x \, dx = \ln(\sqrt{2}+1)$$

13-дәрістегі sec x интегралы геометриялық есепте қолданылды.

Параметрлік қисықтың ұзындығы

x=x(t), y=y(t) функциялары [α,β]-да үздіксіз дифференциалдансын. Қисық бір рет жүріп өтілсе:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

Түбір астындағы өрнек параметр бойынша қозғалыс жылдамдығының квадраты болады.

Қисық қайталанып жүрілсе, интеграл сол қайталануды да санайды.

Шеңбер ұзындығы

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi, \quad R > 0$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$$

$$L = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$$

Циклоиданың бір доғасы

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad a > 0$$

$x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Жылдамдық:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 2a \sin(t/2)$$

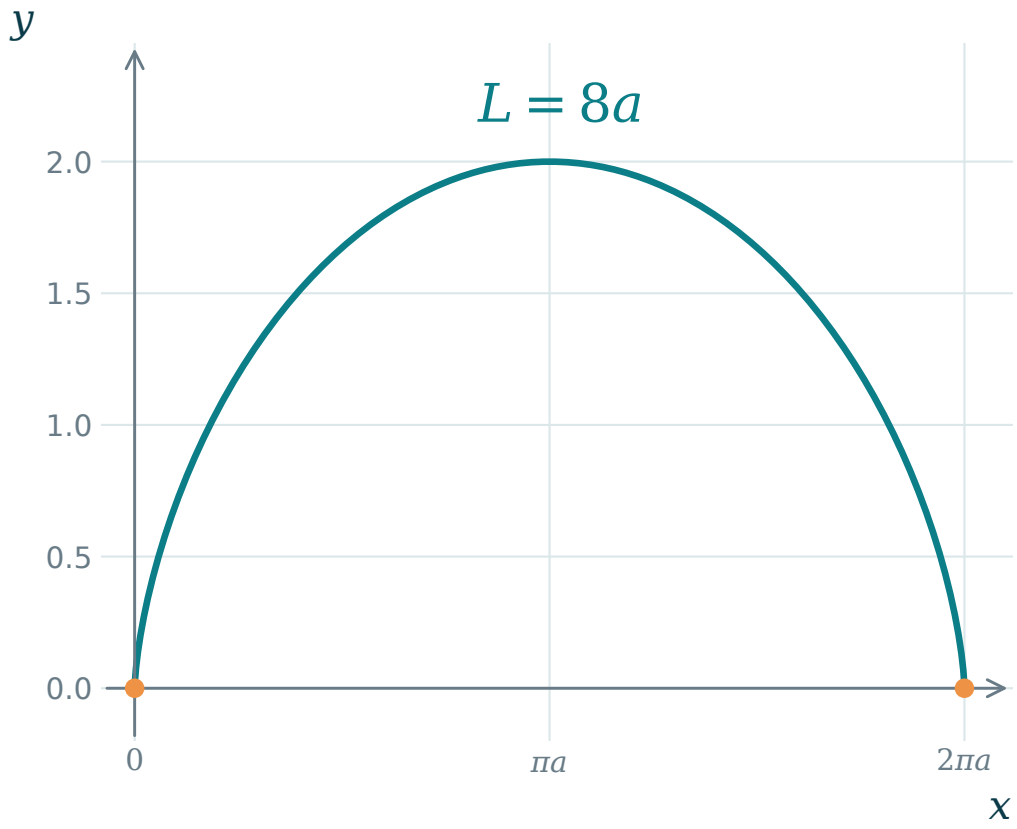
$0 \le t \le 2\pi$ кезінде $\sin(t/2) \ge 0$, сондықтан квадрат түбірдің таңбасы дұрыс ашылды.

Циклоида ұзындығын есептеу

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin(t/2)\, dt = 8a$$

Параметр t нөлден 2π-ге дейін өзгергенде қисықтың бір доғасы бір рет жүріледі.

Ұзындық a параметріне сызықты тәуелді; а екі есе артса, доға ұзындығы да екі есе артады.



Көлденең қималар арқылы көлем

Дене x=a мен x=b арасында орналассын. Ox осіне перпендикуляр қимасының ауданы A(x) үзіліссіз болсын.

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Жұқа қабаттың көлемі шамамен $A(\xi_i)\Delta x_i$. Қабаттардың көлемдерін қосып, шекке өтеміз.

Қима ауданы мен қалыңдықтың көбейтіндісі көлем бірлігін береді.

Ox осінен айналдыру: диск әдісі

0≤y≤f(x), a≤x≤b аймағын Ox осінен айналдырайық. f үзіліссіз және теріс емес болсын.

$$A(x) = \pi f(x)^2$$

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Радиус f(x) болғандықтан, интеграл астында функцияның квадраты тұрады.

Диск әдісіне мысал

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le 4$$

Түбір функциясы үздіксіз. Қима радиусы √x, ал қима ауданы πx болады.

$$V = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

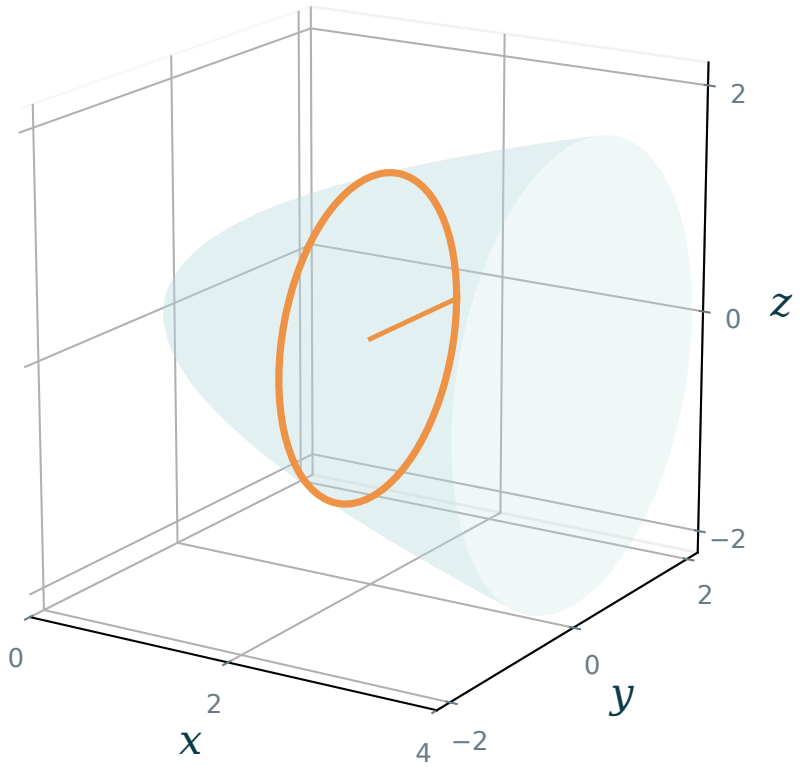
Радиустың туындысын есептеу көлемнің бұл формуласында қажет емес.

Айналу денесі және оның дискілік қимасы

$$A(x) = \pi x, \qquad V = 8\pi$$

Суретте y=√x профилін Ox осінен айналдыру арқылы алынған дене көрсетілген.

Қызғылт шеңбер x=2 жазықтығындағы қиманы белгілейді. Оның радиусы √2.



Сақина әдісі

Қимада сыртқы радиус R(x), ішкі радиус r(x) болсын, R≥r≥0. Сақина ауданы екі диск ауданының айырмасына тең:

$$V = \pi \int_a^b \left(R(x)^2 - r(x)^2\right) dx$$

R және r функциялары үздіксіз болсын. Әуелі радиустардың квадраттарын алып, содан кейін азайтамыз.

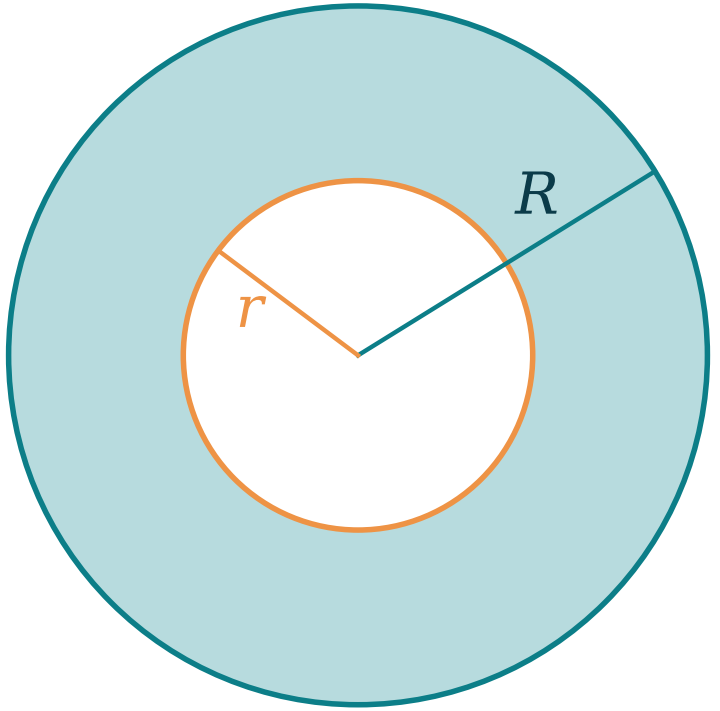
Жалпы жағдайда $R^2 - r^2$ өрнегі $(R-r)^2$-қа тең емес.

Сақина қимасының геометриясы

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

Ақ ішкі дөңгелек денеге кірмейді. Сондықтан оның ауданы үлкен диск ауданынан алынады.

Радиустар әрқашан айналу осінен өлшенетін қашықтықтар.



$A = \pi(R^2 - r^2)$

Сақина әдісіне мысал

$y=x^2$ және $y=2x$ арасындағы $0\le x\le 2$ аймағын Ox осінен айналдырамыз. $R=2x$, $r=x^2$.

$$V=\pi\int_0^2 (4x^2-x^4)\,dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$V=\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)=\frac{64\pi}{15}$$

Айналу осі Ox-тен ығысса

0≤y≤x, 0≤x≤1 аймағын y=2 түзуінен айналдырайық. Ось екі шекарадан да жоғары орналасқан.

$$R = 2, \qquad r = 2 - x$$

$$V = \pi \int_0^1 (4 - (2 - x)^2)\, dx = \frac{5\pi}{3}$$

Радиустар y координаталарының өзі емес, y=2 осіне дейінгі қашықтықтар болады.

Оу осінен айналдыру: көлденең қималар

0≤y≤x, 0≤x≤1 аймағын Оу осінен айналдырамыз. y бекітілгенде x сол жақта y-ден оң жақта 1-ге дейін өзгереді.

$$0 \le y \le 1, \qquad R(y) = 1, \qquad r(y) = y$$

$$V = \pi \int_0^1 (1 - y^2)\, dy = \frac{2\pi}{3}$$

Цилиндрлік қабықтар әдісі

0≤y≤f(x), 0≤a≤x≤b аймағын Oy осінен айналдырайық. Тік жолақ радиусы x, биіктігі f(x) болатын жұқа қабық береді.

$$\Delta V \approx 2\pi x\, f(x)\, \Delta x$$

$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

Радиус x теріс емес және қабықтар денені қабаттасып қайталамай құрауы керек.

Бір көлемді екі әдіспен есептеу

Алдыңғы $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$ аймағы үшін қабық биіктігі x, радиусы да x болады.

$$V = 2\pi \int_0^1 x^2\,dx = \frac{2\pi}{3}$$

Нәтиже көлденең сақиналар әдісімен алынған мәнге тең. Бір әдісте dy, екіншісінде dx қолданылды.

Таңдау аймақты қай бағытта бір формуламен сипаттау оңай екеніне тәуелді.

Шар көлемін қималар арқылы табу

Радиусы R шардың центрін координаталар басына орналастырайық. x координатасындағы қима радиусы $\sqrt{R^2 - x^2}$.

$$A(x) = \pi(R^2 - x^2), \qquad -R \le x \le R$$

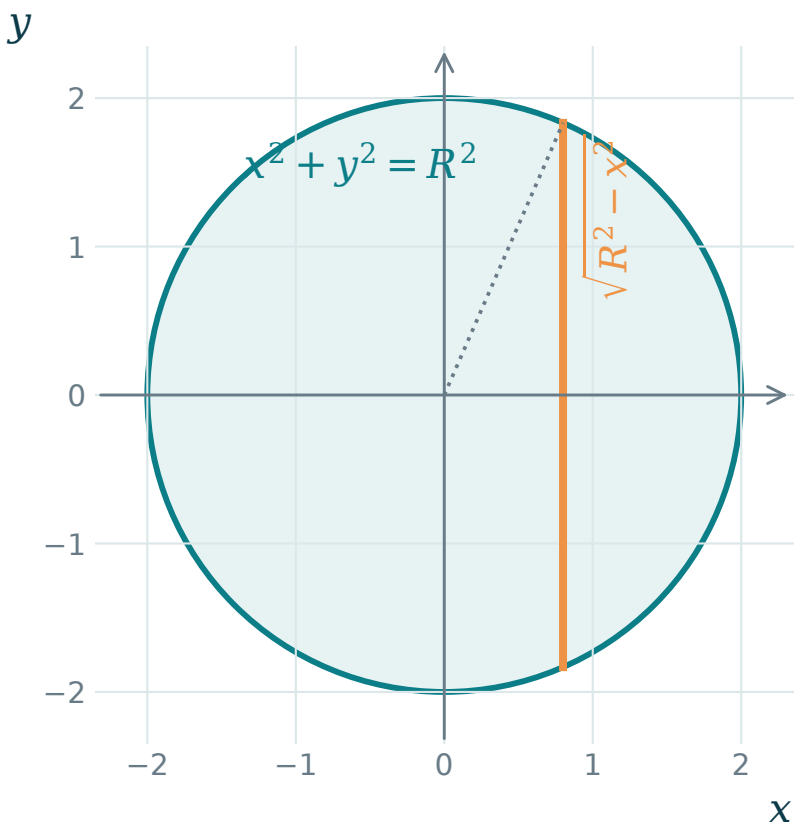
$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Шардың меридиандық қимасы

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Тік кесіндінің жарты ұзындығы √(R²−x²). Оны Ox осінен айналдырғанда дөңгелек қима шығады.

Қима ауданы x-ке қатысты жұп функция. Сондықтан көлемді 0-ден R-ге дейінгі интегралды екі еселеумен де табуға болады.



Конус көлемінің формуласын шығару

Биіктігі h, табан радиусы R конусты Ox осіне орналастырайық. Төбесі x=0, табаны x=h нүктесінде болсын.

$$r(x) = \frac{R}{h}x$$

$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Радиус x бойынша сызықты, ал қима ауданы квадраттық өзгереді.

Өлшем бірліктерімен тексеру

Аудан	Жолақ биіктігі × ені: м·м=м².
Ұзындық	√(1+(f′)²) өлшемсіз болғанда, dx ұзындық бірлігін береді.
Көлем	Қима ауданы × қалыңдық: м²·м=м³.
Қабықтар	Шеңбер ұзындығы × биіктік × қалыңдық: м·м·м=м³.

Қай формуланы қолданамыз?

Жазық аймақ	Тік жолақта жоғарғы−төменгі, көлденең жолақта оң жақ−сол жақ айырмасы.
Қисық доғасы	График берілсе $\sqrt{(1+(f')^2)}$; параметрлік түрде $\sqrt{((x')^2+(y')^2)}$.
Көлем: қималар	Оське перпендикуляр жолақтан диск не сақина ауданы алынады.
Көлем: қабықтар	Оське параллель жолақтан $2\pi\cdot$радиус$\cdot$биіктік көбейтіндісі алынады.

Жиі кездесетін қателер

Таңбалы интеграл	Геометриялық аудан үшін теріс бөліктерді модуль арқылы оң үлеске айналдырамыз.
Ауысатын шекаралар	Қисықтар қиылысса немесе радиустардың реті ауысса, есепті бөліктерге бөлу қажет.
Оське дейінгі қашықтық	Радиус айналу осінен өлшенеді; ось ығысқанда формула да өзгереді.
Айнымалы мен шектер	dx не dy таңдауы жолақ бағытына және шектердің координаталарына сәйкес болуы тиіс.

Курстағы ұғымдардың байланысы

Шектер және үзіліссіздік	Функцияның жергілікті мінезін және шекке өтудің шарттарын сипаттайды.
Туынды	Өзгеру жылдамдығын, жанаманы, монотондық пен экстремумдарды зерттейді.
Алғашқы функция	Туынды бойынша функцияны тұрақтыға дейін қалпына келтіреді.
Анықталған интеграл	Шағын үлестердің жинақталған шамасын береді; негізгі теорема оны туындымен байланыстырады.

Өзіндік жұмыс

1. $y=x$ және $y=x^2$ арасындағы $[0,1]$ аймағының ауданын табыңыз.

2. $y=x^2-1$ графигі мен Ox осі арасындағы $[-1,1]$ ауданын табыңыз.

3. $y=2x$ графигінің $0\le x\le 3$ доғасының ұзындығын табыңыз.

4. $0\le y\le \sqrt{x}$, $0\le x\le 1$ аймағын Ox осінен айналдырғандағы көлемді табыңыз.

5. $y=x$ және $y=x^2$ арасындағы $[0,1]$ аймағын Ox осінен айналдырғандағы көлемді табыңыз.

Өзіндік жұмысқа жауаптар

1. $S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/6.$

2. $S = \int_{-1}^1 (1 - x^2)\,dx = 4/3.$

3. $L = \int_0^3 \sqrt{5}\,dx = 3\sqrt{5}.$

4. $V = \pi \int_0^1 x\,dx = \pi/2.$

5. $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 2\pi/15.$

Қорытынды және бақылау сұрақтары

1. Анықталған интеграл мен геометриялық ауданның айырмашылығы қандай?
2. dx және dy бойынша аудан есептеуде қай шекаралар азайтылады?
3. Доға ұзындығы формуласындағы түбір қайдан пайда болады?
4. Параметрлік қисық қайталанып жүрілсе, ұзындық интегралы нені санайды?
5. Диск, сақина және қабықтар әдістері қалай ажыратылады?
6. Айналу осі ығысқанда радиустар қалай анықталады?

Әдебиеттер

Силлабуста ұсынылған қазақ тіліндегі әдебиеттер

Н. Т. Темиргалиев. Математикалық анализ. 1-3 томдар.

Ж. А. Токибетов. Математикалық талдау дәрістерінің конспектісі.

Теория және есептер жинағы

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа.

Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа.