Жалпыланған функциялар

8-дәріс

Жалпыланған туынды және секіріс

Хевисайд функциясы және секіріс формуласы

Доцент Улбике Рахманбердиевна Кушербаева, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

2-модуль. Жалпыланған функцияларға амалдар

Дәрістің мақсаты мен жоспары

Оқу мақсаты

Бөліктеп интегралдау арқылы туындыны есептеу және секірістің дельта мүшесін табу.

Дәріс жоспары

1. Негізгі ұғымдар
2. Бірнеше секірісі бар функцияны дифференциалдау
3. Практикум және өзіндік жұмыс

Негізгі ұғымдар

Жалпыланған туындыда дифференциалдау сынақ функциясына көшіріледі. Таңба бөліктеп интегралдаудан шығады. Егер f тегіс болса, сынақ функциясының компакт тасымалдаушысы шеткі мүшелерді жояды және $(T_f)' = T_\{f'\}$ теңдігі орындалады. Жалпыланған дифференциалдау әлсіз жинақталуды сақтайды, өйткені әрбір φ үшін φ' алдын ала бекітілген сынақ функциясы.

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Шығарылған мысал

H үшін $\langle H', \varphi \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0)$. Демек $H' = \delta_0$. Егер f бір a нүктесінде секіретін бөліктеп C^1 функция болса және оның біржақты мәндері мен локальді интегралданатын классикалық туындысы бар болса, екі аралықта бөліктеп интегралдаймыз. Шеткі мүшелердің қосындысы $[f(a+) - f(a-)]\varphi(a)$ болады. Осыдан f′_жалп=f′_бөлік+[f]_аδₐ шығады.

Негізгі ұғымдар

Мысалы, |x| үзіліссіз, сондықтан оның бірінші туындысында дельта мүшесі шықпайды. Бірінші туынды $sign(x)$, ал $sign(x)$ функциясының нөлдегі секірісі 2. Демек $(|x|)'' = 2\delta_0$. Бұл тәсіл сингуляр мүшенің қандай ретте шығатынын анықтайды.

Секірістің туындыға қосатын үлесі

ТЕОРЕМА

f функциясы a-ның екі жағында C^1, біржақты шектері бар, f' жергілікті интегралданатын болсын. Онда $Df = f'_{reg} + [f(a+) - f(a-)]\delta_a$.

$$Df = f'_{\mathrm{reg}} + [f(a^+) - f(a^-)]\delta_a$$

Дәлелдеу · 1-қадам

Секірістің туындыға қосатын үлесі

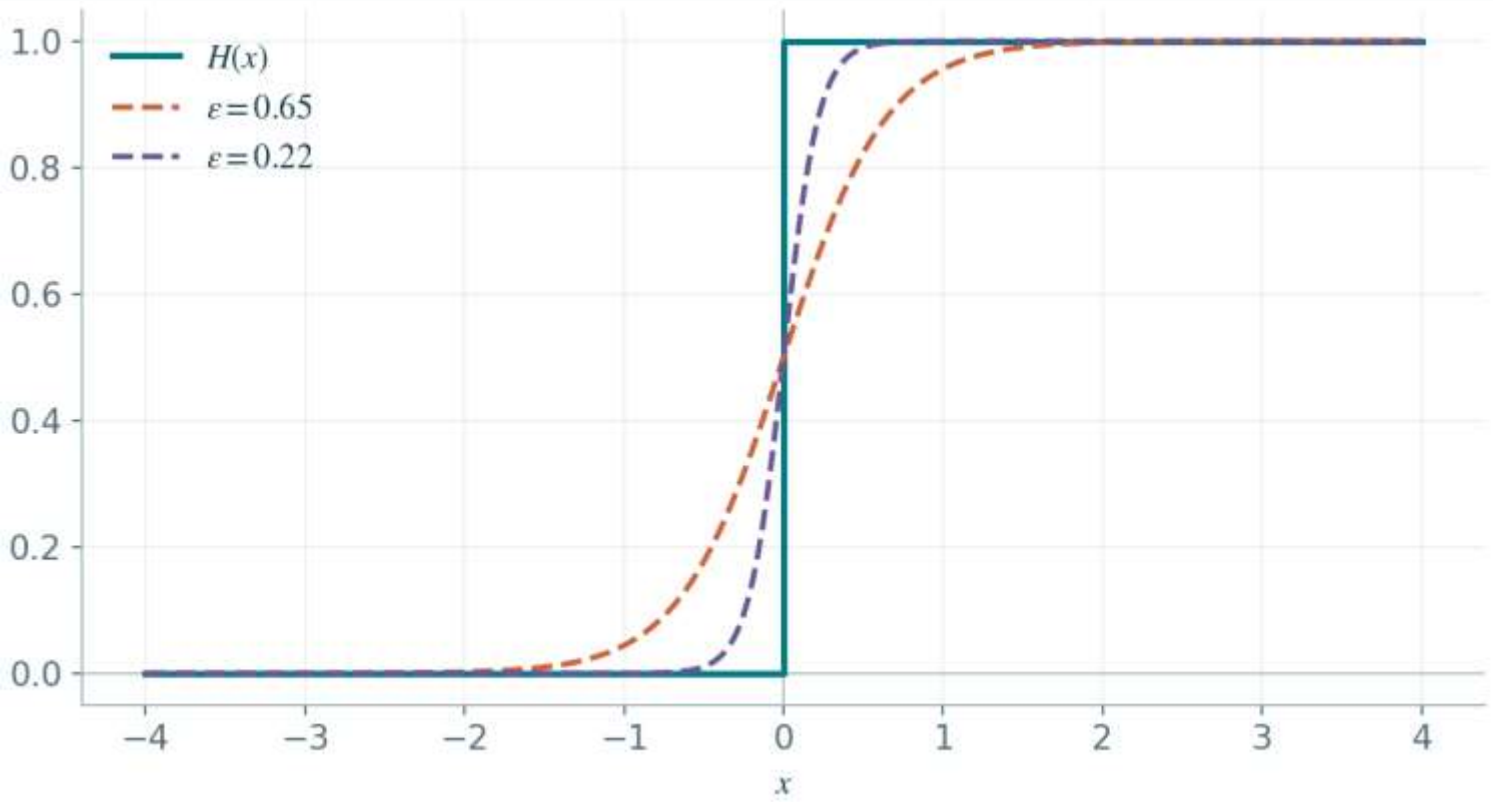
⟨Df,φ⟩=−∫_−∞a $f\varphi'$ − $\int_a \infty$ $f\varphi'$ деп бөлеміз. Алдымен a-дан алшақ жабық аралықтарда бөліктеп интегралдаймыз. Сыртқы шеткі мүшелер сынақ функциясының компакт тасымалдаушысынан нөл.

Дәлелдеу · 2-қадам

Секірістің туындыға қосатын үлесі

Ішкі шеттер a-ға жақындағанда сол аралық $-f(a-)\varphi(a)$, ал оң аралық $+f(a+)\varphi(a)$ береді. Қалған интегралдар $\int f'_{reg}\varphi$-ге жинақталады. Шекаралық мүшелердің қосындысы δ_a коэффициентін береді.

Хевисайд функциясының тегіс жуықтауы



Графикті оқу

Үзік сызықтар H функциясының тегіс жуықтауларын көрсетеді. Туындының нүктелік мүшесі секіріс шамасымен өлшенеді.

Түсіндірме

Формуладан $[f]_a$ және $[f']_a$ секірістері бар бөліктеп C^2 функция үшін f″_жалп=f″_бөлік+[f′]aδa+[f]aδa′ шығады. Мысалы, $f = H$ болғанда $[f']_0 = 0$, $[f]_0 = 1$, сондықтан $H'' = {\delta_0}'$.

Өзіндік жұмыс

$1_{a,b}$ функциясының туындысын табыңыз. Жауап: $\delta_a - \delta_b$. Сол шетте секіріс $+1$, оң шетте -1.

Классикалық және жалпыланған туындыны салыстыру

Классикалық және жалпыланған туындыны салыстыру. f тегіс болса, екі туынды бірдей функционал береді. f үзіліссіз, бірақ бөлшектеп тегіс болса, бірінші туынды көбіне бөліктердегі классикалық туындымен беріледі. Секіріс пайда болғанда жағдай өзгереді. Мысалы, H-тің классикалық туындысы $x \neq 0$ үшін нөл. Ал $\langle DH, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Сондықтан тек $x \neq 0$- дегі мәндерді жазу нөлдегі секіріс туралы ақпаратты жоғалтады.

Бірнеше секірісі бар функцияны дифференциалдау

f функциясы $a_1 <\cdots< a_n$ нүктелерінен басқа жерлерде C^1 болсын. Біржақты шектері бар және бөліктердегі туындысы локальді интегралданады деп аламыз. $\langle Df, \varphi\rangle = -\int f\varphi'$ интегралын осы нүктелер бойынша бөлеміз. Әр аралықта бөліктеп интегралдағанда ішкі интеграл $\int f'\varphi$ болады. a_i нүктесінің сол жағынан $-f(a_i-)\varphi(a_i)$, оң жағынан $+f(a_i+)\varphi(a_i)$ шығады.

$$Df = f'_{\text{бөлік}} + \sum_i [f]_{a_i}\,\delta_{a_i}, \qquad [f]_{a_i} = f(a_i^+) - f(a_i^-).$$

Бірнеше секірісі бар функцияны дифференциалдау

Шексіз ұштардағы мүшелер жоғалады, себебі φ компактта тасымалданады. Егер f бөліктеп C^2 болып, f'-тің де біржақты шектері бар болса, осы формуланы тағы қолданамыз. Сонда $D^2 f$ құрамында f″_бөлік, f' секірістеріне сәйкес δ мүшелері және f секірістеріне сәйкес δ' мүшелері пайда болады.

Бірнеше секірісі бар функцияны дифференциалдау

Мысал. $f(x) = x \cdot 1_{0,1}(x)$. Нөлде функцияның секірісі жоқ. 1-де оң мән 0, сол мән 1, сондықтан секіріс -1. Бөліктердегі туынды $1_{0,1}$. Осыдан $Df = 1_{0,1} - \delta_1$. Енді $D^2 f = \delta_0 - \delta_1 - \delta_1{}'$. Соңғы өрнекті тексеру үшін $\langle D^2 f, \varphi \rangle = \int_0^1 x\varphi'' dx$ интегралын есептейміз. Нәтиже $\varphi'(1) - \varphi(1) + \varphi(0)$, бұл формуламен сәйкес.

Үшінші туындыны есептеу

Үшінші туындыны есептеу. Егер f бөліктеп C^3, қажетті біржақты шектері бар және бөліктердегі туындылары локальді интегралданса, екінші туынды формуласын тағы дифференциалдаймыз. Нәтижеде бөліктердегі f''', $[f'']_a\delta_a$, $[f']_a\delta_a{}'$ және $[f]_a\delta_a{}''$ қосылғыштары алынады. Әр қадамда регуляр бөліктің жаңа секірісі δ туғызады. Бұрын шыққан δ мүшелерінің туынды реті біреуге өседі. Формуланы бірнеше секіріс нүктесіне қосынды арқылы қолдануға болады.

Шығарылған есеп

$f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ «шатыр» функциясы берілсін. Ол бүкіл осьте үзіліссіз, сондықтан бірінші туындыда δ жоқ. $(-1,0)$ аралығында көлбеуі 1, (0,1) аралығында -1, ал сыртында 0.

$$Df = \mathbf{1}_{(-1,0)} - \mathbf{1}_{(0,1)}, \qquad D^2 f = \delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1.$$

Екінші туындыны көлбеудің секірістерінен алдық

Екінші туындыны көлбеудің секірістерінен алдық. -1 нүктесінде секіріс $1-0=1$, нөлде $-1-1=-2$, ал 1 нүктесінде $0-(-1)=1$. Тікелей тексерсек, $\langle D^2 f, \varphi \rangle = -\int_{-1}^{0} \varphi' + \int_{0}^{1} \varphi' = \varphi(-1) - 2\varphi(0) + \varphi(1)$.

Өзіндік жұмыс

1) $f(x) = H(x-2)$ үшін Df және $D^2 f$ табыңыз.

2) $f(x) = |x-a|$ үшін $D^2 f$ және $D^3 f$ есептеңіз.

3) $f(x)$ сол жарты осьте 0, (0,1)-де 2, оң жақта 5 болсын. Df және $D^2 f$ қандай?

4) $f(x) = xH(x)$ үшін $D^2 f = \delta_0$ теңдігін тікелей жұптастырумен тексеріңіз.

Жауаптарды тексеру

1) δ_2 және δ_2'. 2) $2\delta_a$ және $2\delta_a'$. 3) $2\delta_0 + 3\delta_1$ және $2\delta_0' + 3\delta_1'$. 4) $\int_0\text{^}\infty x\varphi''(x)dx = -\int_0\text{^}\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0)$. Шекарадағы $x\varphi'(x)$ мүшесі екі ұшта да нөлге тең.

Қосымша есеп

$f(x) = x^2 H(x)$ болсын. Нөлде f және f' екеуі де үздіксіз. Сондықтан $Df = 2xH(x)$, $D^2 f = 2H(x)$. Үшінші туынды $D^3 f = 2\delta_0$. Тікелей тексеру үшін $-\int_0 ^\infty x^2 \varphi''' dx$ интегралын екі рет бөліктеп интегралдаймыз. Ол $-2\int_0 ^\infty \varphi' dx = 2\varphi(0)$ болады. Осы мысал f пен f' үздіксіз болғанда сингуляр мүше жоғары ретті туындыда шығуы мүмкін екенін көрсетеді.

Өзіндік тапсырмалар

01 $D^2|x-2|$ туындысын табыңыз.

02 f(x)=x$\mathbb{1}_{(0,1)}$(x) үшін Df-ті регуляр және сингуляр бөліктерге жіктеңіз.

Қорытынды

Жалпыланған туындыда сынақ функциясының туындысы алынады. Бөлік-бөлік тегіс функцияның секірісі туындыда дельта мүшесін береді.

Бақылау сұрақтары

01 δ_a коэффициентін оң және сол шектерден қалай табамыз?

02 Үзіліссіз функцияның бірінші туындысында секіріске сәйкес дельта неге шықпайды?

Әдебиеттер

01 И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1. 2-е изд. Москва, 1959.
Оқылатын бөлім · I тарау, §2, 33–43-б.

02 М. В. Фалалеев. Обобщенные функции и действия над ними. 2-е изд. Иркутск, 2011.
Қосымша оқу құралы.

03 Р. К. Бельхеева. Обобщенные функции в примерах и задачах. Новосибирск, 2014.
Есептер мен мысалдар жинағы.